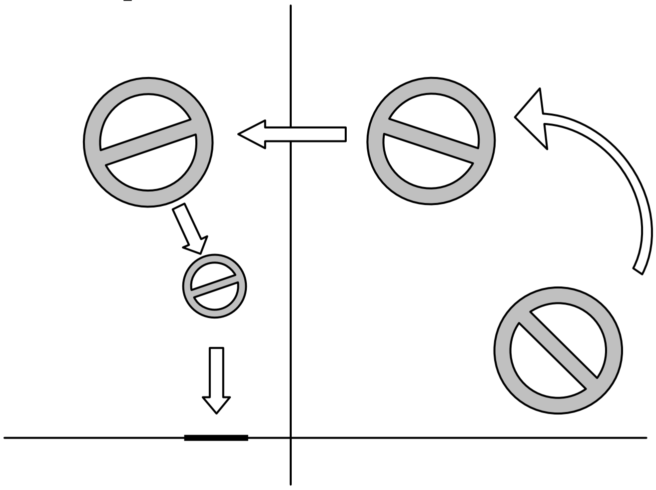
LAS MATRICES COMO TRANSFORMACIONES LINEALES DEL PLANO

1. Las matrices 2x2 como transformaciones lineales del plano



A lo largo de este tema estudiaremos una serie de modificaciones del plano que llamaremos transformaciones lineales, cuya característica común es la de estar asociadas a las matrices cuadradas de orden 2x2. El gráfico muestra cómo actúan cuatro transformaciones lineales (giro, simetría axial, homotecia y proyección) modificando progresivamente la primera señal. Las flechas indican exclusivamente la secuencia de transformaciones.

Sabemos que la multiplicación de una matriz cuadrada de orden 2x2 por una matriz columna 2x1 da como resultado otra matriz columna 2x1. Es decir, la ecuación matricial: $M \bullet X = X'$

Los puntos del plano estarán representados por la matriz columna X cuyos elementos son sus coordenadas cartesianas.

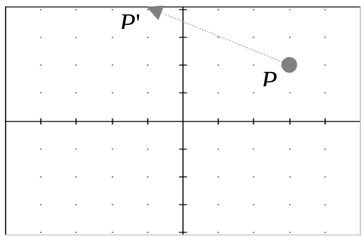
La matriz cuadrada M contendrá las características propias de la transformación lineal.

La matriz columna X' representará también a un punto del plano: el transformado de X mediante la matriz M.

En forma de producto de matrices será: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Separando en dos ecuaciones tendrá el aspecto: $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$

Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$



El producto anterior puede entenderse gráficamente como una transformación del plano que convierte al punto P(3, 2) en el punto P'(-1, 4) como muestra el gráfico adjunto. (La flecha del dibujo es una manera de presentar la transformación pero no debe entenderse como una traslación o vector)

La transformación producida sobre este punto sería sólo un ejemplo de las que podrán efectuarse si multiplicásemos esta matriz por todos los puntos del plano. Si llamamos (x, y) a estos puntos, tendríamos: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ x + \dfrac{y}{2} \end{pmatrix}$

Las fórmulas que resultan son las propias de esta transformación. Si llamamos (x', y') al nuevo punto tendríamos que las fórmulas $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x + \dfrac{y}{2} \end{cases}$ representan la transformación del plano que realiza la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$

Razonando al revés, dadas las fórmulas podríamos encontrar la matriz, es decir, desde $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 2x - 5y \end{cases}$ llegaríamos a la conclusión de que son las que le corresponden a la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se denomina identidad y no modifica la posición de los puntos del plano.

Si nos preguntásemos qué punto es el que se transforma mediante una matriz en un punto dado, tendríamos dos alternativas: resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas o calcular la inversa de la matriz.

Por ejemplo, y volviendo a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ vamos a encontrar el punto (x, y) que se transforma en el punto (-7, 3)

Si resuelves el sistema $\begin{cases} -7 = x - 2y \\ 3 = x + \dfrac{y}{2} \end{cases}$ se deduce fácilmente que $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ y que por lo tanto es el punto (1, 4) el que se transforma en el punto (-7, 3).

Otra forma de llegar a este mismo resultado es a través de la matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Si queremos encontrar la matriz asociada a una transformación de la que conocemos sus efectos geométricos, bastaría con estudiar como actúa con los puntos (1, 0) y (0, 1), ya que sus transformados serán respectivamente la 1ª y 2ª columnas de la matriz. Véase:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

En el epígrafe **5.5** está desarrollado un ejemplo de aplicación de lo dicho.

2. Elementos dobles de una transformación lineal

Se denominan elementos dobles de una transformación aquellos puntos que se transforman en sí mismos.

Es obvio que cualquier matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene de seguro como punto doble al origen, pero puede no ser el único. En cualquier caso los hallaríamos resolviendo:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si la matriz $\begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix}$ es una matriz regular (tiene inversa) el único punto doble sería el origen, pero si $\begin{vmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{vmatrix} = 0$ hay una infinidad de puntos dobles, que representados, forman una recta del plano que incluye al origen. La ecuación de esta recta es $y = -\dfrac{a-1}{b}x$

Ejemplo. Los puntos dobles de la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ son:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y = x \\ 6x + 3y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 6x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \{3x + y = 0 \Rightarrow y = -3x$$

Los elementos dobles serán entonces los puntos contenidos en la recta de ecuación $y = -3x$

3. La transformada de una recta

Vamos a demostrar que estas transformaciones del plano representadas por matrices transforman puntos alineados en puntos alineados, es decir rectas en rectas.

Sea $y = \mathrm{m}x + \mathrm{n}$ una recta dada y sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz cualquiera. Tendremos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ mx+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + b(mx+n) \\ cx + d(mx+n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+bm)x + bn \\ (c+dm)x + dn \end{pmatrix}$$

Si lo escribimos como sistema de ecuaciones y lo resolvemos:

$$\begin{cases} x' = (a+bm)x + bn \\ y' = (c+dm)x + dn \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x'-bn}{a+bm} = x \\ \dfrac{y'-dn}{c+dm} = x \end{cases} \Rightarrow \frac{x'-bn}{a+bm} = \frac{y'-dn}{c+dm} \Rightarrow \frac{(x'-bn)(c+dm)}{a+bm} + dn = y' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(c+dm)}{a+bm}x' - \frac{bn(c+dm)}{a+bm}$$

Vemos que los puntos (x', y') están situados sobre la recta $y' = \dfrac{(c+dm)}{a+bm}x' - \dfrac{bn(c+dm)}{a+bm}$, que será la transformada de la recta inicial $y = \mathrm{m}x + \mathrm{n}$

Ejemplo. Sea la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ y la recta $y = 3x + 7$ repitiendo los cálculos anteriores:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 3x+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - (3x+7) \\ -5x + 4(3x+7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-7 \\ 7x+28 \end{pmatrix}$$

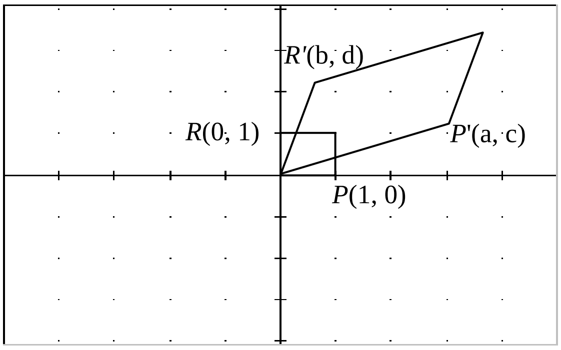
$$\begin{cases} x' = -x - 7 \\ y' = 7x + 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x'+7}{-1} = x \\ \dfrac{y'-28}{7} = x \end{cases} \Rightarrow \frac{x'+7}{-1} = \frac{y'-28}{7} \Rightarrow 7x'+49 = -y'+28 \Rightarrow y' = -7x'-21$$

Luego la recta $y' = -7x' - 21$ será la transformada de la recta inicial $y = 3x + 7$

4. Interpretación gráfica del determinante de la matriz asociada a una transformación lineal

Sabemos que una matriz transforma puntos alineados en puntos alineados, por lo que dado un cuadrado, los transformados de sus vértices formarán un paralelogramo.

Dada la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, elegimos como cuadrado inicial el determinado por los vértices O(0, 0) P(1, 0) Q(1, 1) R(0, 1), sus respectivos transformados serán O'(0, 0) P'(a, c) Q'(a + b, c + d) R'(b, d)



Sabemos que si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores situados sobre dos lados no paralelos de un paralelogramo, su área se puede calcular con el valor absoluto del producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{w}$ siendo $\vec{w}$ un vector ortogonal a $\vec{v}$ con su mismo módulo. Es decir: $Area = |\vec{u}\cdot\vec{w}|$

El área del nuevo paralelogramo será entonces:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{u} = (a,c) \\ \vec{v} = (b,d) \Rightarrow \vec{w} = (d,-b) \end{array}\right\} \Rightarrow Area = |\vec{u}\cdot\vec{w}| = |(a,c)\cdot(d,-b)| = |ad - bc|$$

El resultado coincide con el valor absoluto del determinante de la matriz, por lo que interpretaremos entonces que, dado que el área del cuadrado inicial es 1, el determinante de la matriz asociada cuantifica la transformación de las áreas. El posible signo menos que resulte del determinante lo asociaríamos a un cambio de orientación del plano respecto de la orientación primitiva (arriba-abajo o izquierda-derecha pero no ambas).

Ejemplos

La matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ cuyo determinante vale 3, transformaría las superficies triplicando su área.

La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ cuyo determinante vale 1, transformaría las superficies manteniendo su área.

La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ cuyo determinante vale -2, transformaría las superficies duplicando su área pero cambiando su orientación.

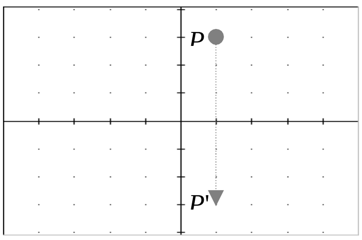
5. Ejemplos de transformaciones lineales

Veamos ahora ejemplos sencillos de transformaciones lineales.

5.1 Simetría axial respecto del eje O*X*

La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ realiza la transformación $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ que gráficamente se entiende como una simetría en torno al eje de abscisas O*X*.

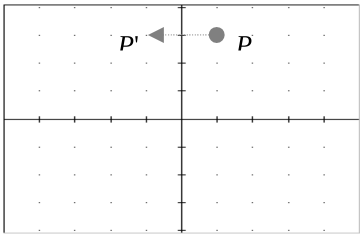
Por ejemplo, al punto P(1, 3) se transformaría en el punto P'(1, -3) como se muestra en el dibujo.



Obviamente los puntos dobles de esta transformación son los situados sobre el eje de abscisas.

El determinante de esta matriz es -1, coherentemente con el hecho de que una simetría no modifica las proporciones de las figuras, pero si modifica la orientación primitiva arriba-abajo

5.2 Simetría axial respecto del eje O*Y*

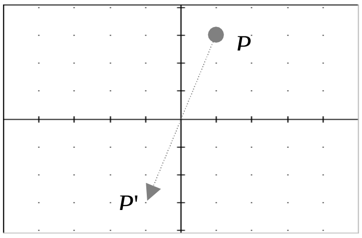


La matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ realiza la transformación $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ que gráficamente se entiende como una simetría en torno al eje de ordenadas O*Y*.
Por ejemplo, al punto P(1, 3) se transformaría en el punto P'(-1, 3) como se muestra en el dibujo.

Obviamente los puntos dobles de esta transformación son los situados sobre el eje de ordenadas.

El determinante de esta matriz es -1, coherentemente con el hecho de que una simetría no modifica las proporciones de las figuras, pero si modifica la orientación primitiva derecha-izquierda

5.3 Simetría central respecto del origen

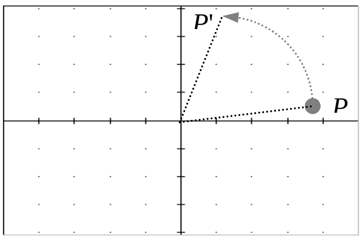


La matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ realiza la transformación $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ que gráficamente se entiende como una simetría respecto del origen
Por ejemplo, al punto P(1, 3) se transformaría en el punto P'(-1, -3) como se muestra en el dibujo.

Obviamente el único punto doble de esta transformación es el propio origen.

El determinante de esta matriz es 1, coherentemente con el hecho de que una simetría no modifica las proporciones de las figuras, el signo es positivo puesto que produce dos modificaciones de la orientación primitiva: arriba-abajo y derecha-izquierda

5.4 Giro en torno del origen



Pretendemos estudiar el transformado de un punto (*x*, *y*) después de girarlo un ángulo α en torno al origen.
El estudio se puede hacer mediante la geometría analítica del plano, pero es mucho más sencillo y bonito emplear los números complejos en forma polar.
Asociaríamos a cada punto de coordenadas (*x*, *y*) con el número complejo $x + iy$
Sabemos que al multiplicar dos números complejos en forma polar, resultan multiplicados sus módulos y sumados sus argumentos. Si multiplicamos el punto dado por el número complejo 1_α resultará un número complejo situado respecto del origen a la misma distancia que $x + iy$ y formando un ángulo suma α con el de $x + iy$. Es decir, que resulta el punto que buscábamos, el transformado de un punto (*x*, *y*) después de girarlo un ángulo α en torno al origen.
Tendremos entonces:

$$1_\alpha \cdot (x + iy) = 1 \cdot (\cos\alpha + i \,\mathrm{sen}\,\alpha) \cdot (x + iy) = x\cos\alpha + iy\cos\alpha + ix\,\mathrm{sen}\,\alpha + i^2 y\,\mathrm{sen}\,\alpha =$$
$$= (x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha) + i(x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha)$$

Luego el punto que resulta de girar (*x*, *y*) es $(x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha, x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha)$

Por lo tanto la matriz $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ representa este giro.

Obviamente el único punto doble de esta transformación es el propio origen.

Por la propiedad fundamental de la trigonometría, el determinante de esta matriz es 1, resultado coherente con el hecho de que un simple giro no modifica las proporciones de las figuras.

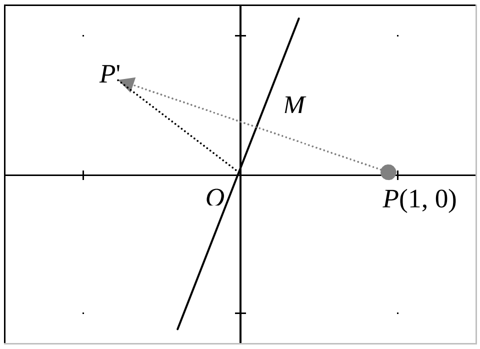
Es interesante comprobar cómo el producto de dos matrices giro con ángulos α y β (que equivale a un giro de ángulo α + β) reproduce las conocidas fórmulas trigonométricas del coseno y seno de la suma de dos ángulos:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta & -(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta) \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta & \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{pmatrix}$$

Este resultado coincide con la matriz giro de ángulo α + β: $\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$

5.5 Simetría axial respecto de una recta que pasa por el origen

Supongamos que queremos estudiar la simetría en torno a una recta que pasa por el origen. Su ecuación sería $y = (\text{tg } \alpha)x$ siendo α el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX



Veamos primero el punto transformado de (1, 0):

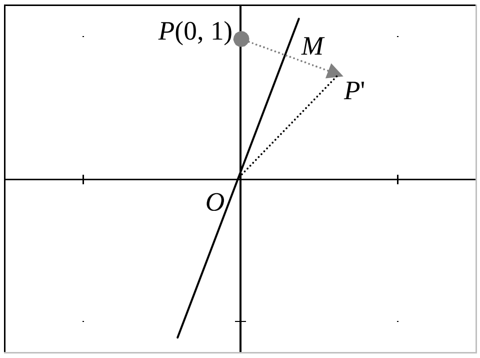
Sabemos que el ángulo $P\hat{O}M$ es α

Por simetría, el ángulo $P'\hat{O}M$ también es α

Luego el ángulo $P\hat{O}P'$ es 2α

Por lo tanto para hallar el punto P' basta con girar un ángulo 2α al punto P(1, 0)

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\operatorname{sen} 2\alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha \end{pmatrix}$$



Veamos ahora el transformado de (0, 1):

Sabemos que el ángulo $P\hat{O}M$ es 90 - α

Por simetría, el ángulo $P'\hat{O}M$ también es 90 - α

Luego el ángulo $P\hat{O}P'$ es 180 - 2α

Por lo tanto para hallar el punto P' basta con girar un ángulo 180 - 2α al punto P(0, 1) en sentido antihorario que equivale a 2α - 180 en sentido horario.

$$\begin{pmatrix} \cos(2\alpha-180) & -\operatorname{sen}(2\alpha-180) \\ \operatorname{sen}(2\alpha-180) & \cos(2\alpha-180) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(2\alpha-180) \\ \cos(2\alpha-180) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(180-2\alpha) \\ \cos(180-2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2\alpha \\ -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

La matriz asociada a la simetría en torno a una recta que pasa por el origen que forma un ángulo α con la parte positiva del eje OX es entonces: $\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \operatorname{sen} 2\alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$

Obviamente los puntos dobles de esta transformación son los situados sobre el eje de simetría.

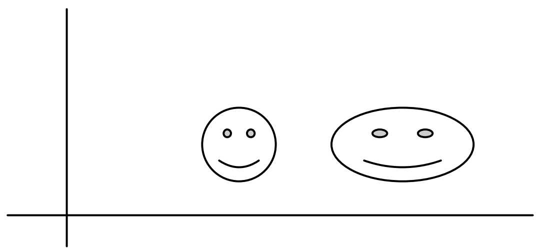
El determinante de esta matriz es -1, coherentemente con el hecho de que una simetría no modifica las proporciones de las figuras, pero si modifica la orientación primitiva

Un ejemplo frecuente es el que resulta de escoger como eje de simetría la bisectriz del primero y tercer cuadrantes. Es decir: $y = x$

El ángulo α = 45º luego la matriz resulta: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y sus fórmulas: $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

5.6 Elongaciones (estiramientos y contracciones)

Siendo k un número real positivo, la matriz $\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ realiza la transformación $\begin{cases} x' = hx \\ y' = y \end{cases}$ que gráficamente se entiende como una elongación del eje OX, manteniendo las proporciones del eje OY. El gráfico muestra esta transformación.

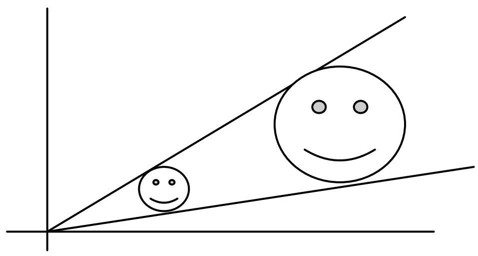


Por ejemplo, la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ estiraría al plano horizontalmente al triple manteniendo las medidas verticales.

Siendo k un número real positivo, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$ realiza la transformación $\begin{cases} x' = x \\ y' = vy \end{cases}$ que gráficamente se entiende como una elongación del eje OY, manteniendo las proporciones del eje OX

Siendo h y k números reales positivos, la matriz $\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$ realiza la transformación $\begin{cases} x' = hx \\ y' = vy \end{cases}$ que gráficamente se entiende como dos elongaciones distintas de los ejes OX y OY con razones respectivas h y v.

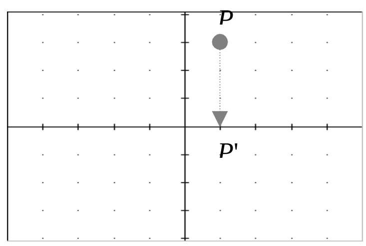
Siendo k un número real positivo, la matriz $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ realiza la transformación $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$ que gráficamente se entiende como una homotecia de razón k. El gráfico muestra un ejemplo de homotecia.



Por ejemplo, transformar el plano según $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sería observar lo que vulgarmente se entiende como un zoom del 200% mientras que $\begin{pmatrix} 0'5 & 0 \\ 0 & 0'5 \end{pmatrix}$ sería una compresión del 50%

5.7 Proyección sobre el eje O*X*

La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ realiza la transformación $\begin{cases} x' = x \\ y' = 0 \end{cases}$ que gráficamente se entiende como una proyección sobre el eje de abscisas O*X*.

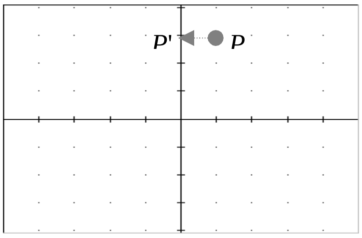


Por ejemplo, al punto P(1, 3) se transformaría en el punto P'(1, 0) como se muestra en el dibujo.

Obviamente los puntos dobles de esta transformación son los situados sobre el eje de abscisas.

E interesante observar que esta transformación produce una reducción en la dimensión del plano, es decir, que una figura plana bidimensional se transformaría en un segmento sobre el eje O*X*. Esto es coherente con el hecho de que el determinante de la matriz sea nulo.

5.8 Proyección sobre el eje O*Y*



La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ realiza la transformación $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = y \end{cases}$ que gráficamente se entiende como una proyección sobre el eje de ordenadas O*Y*.
Por ejemplo, al punto P(1, 3) se transformaría en el punto P'(0, 3) como se muestra en el dibujo.
Obviamente los puntos dobles de esta transformación son los situados sobre el eje de ordenadas.
E interesante observar que esta transformación produce una reducción en la dimensión del plano, es decir, que una figura plana bidimensional se transformaría en un segmento sobre el eje O*Y*. Esto es coherente con el hecho de que el determinante de la matriz sea nulo.

6. Composición de transformaciones

Si queremos estudiar la transformación que resulta después de aplicar, una tras de otra, dos transformaciones dadas, bastaría con multiplicar sus matrices, teniendo la precaución de poner a la matriz A_1 asociada a la 1ª transformación junto al punto (*x*, *y*) lo que significará ponerla en el producto a la derecha, colocando la izquierda la matriz A_2 asociada a la 2ª transformación. Es decir, el producto $A_2 \bullet A_1$

Ejemplo:
Si queremos estudiar la transformación que resulta de efectuar sobre el punto (*x*, *y*) el movimiento $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ y al punto resultante transformarle mediante $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$ la operación sería la siguiente: $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3x+5y \\ 7x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19x+22y \\ 66x+52y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 66 & 52 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

El resultado coincide con el producto de matrices: $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 66 & 52 \end{pmatrix}$

Si componemos una transformación con la que realiza su movimiento contrario, el plano no se vería modificado. Esto está relacionado con el hecho de que el producto de una matriz con su inversa resulta la matriz identidad.
Un ejemplo de esto aparece en el epígrafe **1**. Por los cálculos efectuados entonces sabemos que el movimiento que realiza en el plano la matriz $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ es el contrario del que realiza la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ por lo que si compusiésemos ambas matrices (y el orden no importaría aquí) los puntos del plano no se verían modificados.

Es razonable entonces que su producto resulte la matriz identidad $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

La composición de transformaciones lineales se utiliza para estudiar movimientos complicados descomponiéndolos producto de otros más sencillos. Por ejemplo, la simetría axial respecto de una recta que pasa por el origen que hemos estudiado en **5.5** se podría haber hecho así:

Empezaríamos con un giro - α para que la recta se sitúe sobre el eje O*X*, continuando con una simetría axial respecto del eje O*X*, y terminando con un giro α para que la recta se sitúe en su posición original. Es importante recordar que el orden de los factores es justo el contrario del relatado.
Tendríamos entonces:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\operatorname{sen}(-\alpha) \\ \operatorname{sen}(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

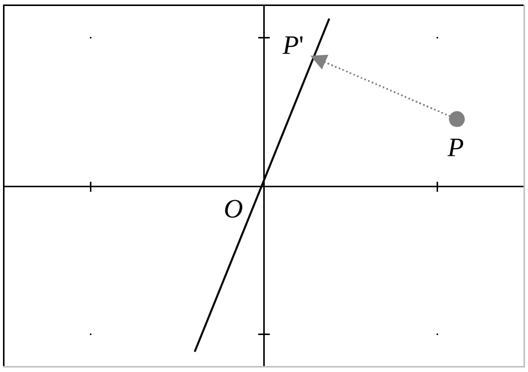
$$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha & 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \operatorname{sen} 2\alpha \\ \operatorname{sen} 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

Llegándose al mismo resultado del **5.5**.

Otro estudio similar, para una transformación que aun no hemos estudiado es:

6.1 Proyección sobre una recta que pasa por el origen

Supongamos que queremos estudiar la proyección sobre una recta que pasa por el origen. Su ecuación sería $y = (\operatorname{tg}\alpha)x$ siendo α el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje O*X*



Bastaría con efectuar primero un giro - α para que la recta se sitúe sobre el eje O*X*, realizar entonces una proyección sobre el eje O*X*, terminando con un giro α para que la recta se sitúe en su posición original.
Es importante recordar que el orden de los factores es justo el contrario del relatado.

Tendríamos entonces:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -sen(-\alpha) \\ sen(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 \\ sen\alpha & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & sen\alpha\cos\alpha \\ sen\alpha\cos\alpha & sen^2\alpha \end{pmatrix}$$

Resultado al que llegaríamos con más esfuerzo utilizando la geometría analítica.