EJERCICIOS DE TRANSFORMACIONES LINEALES

1. a) Describa completamente la transformación única del plano representada por la matriz: $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

   b) Determine el significado geométrico del determinante de la matriz $B=\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}$ en la transformación del plano representada por la matriz B

2. Sea R la matriz que representa la simetría del plano respecto del eje $y=\sqrt{3}\cdot x$. Sea S la matriz que representa el giro antihorario de ángulo α. Sea T la matriz que representa la simetría del plano respecto del eje OY.
   a) Halle las matrices R, S y T.
   b) Si la transformación T es equivalente a la transformación R seguida de la transformación S.
   c) i) escriba la ecuación matricial que conecta las matrices R, S y T.
   d) ii) exprese S en función de R y T y/o sus inversas y partiendo de aquí, halle el valor de α ($0<\alpha<2\pi$).

3. Una transformación lineal aplica $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$. ¿Cuál es la imagen de $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$?

4. La matriz L representa la simetría del plano respecto del eje $y=x\cdot \mathrm{tg}\,\alpha$ siendo $0^{\circ}<\alpha<90^{\circ}$.
   a) Demuestra que $L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(2\alpha)\\ \mathrm{sen}(2\alpha)\end{pmatrix}$
   b) Halla $L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
   c) Demuestra que $\det(L) = -1$

5. La matriz L transforma los puntos con vectores de posición $\vec{i}+\vec{j}$ y $\vec{i}-\vec{j}$ en los puntos con vectores de posición $2\vec{i}-4\vec{j}$ y $6\vec{j}$ respectivamente. Halla la matriz L.

6. a) Demuestra que la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -6 & 0\end{pmatrix}$ transforma puntos pertenecientes a la recta $y=-2x$ en otros puntos también pertenecientes a la misma recta.
   b) Halla la ecuación de otra recta diferente que tenga esta misma propiedad.

7. Describe qué transformación representan las matrices siguientes:
   $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

① a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

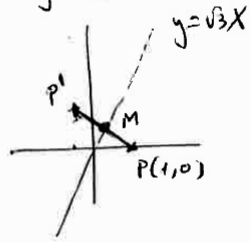
Como $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ es perpendicular a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, la transformación es un giro de $+90^\circ$.

Además: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\operatorname{sen} 90^\circ \\ \operatorname{sen} 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = k^2$

Un área de A us se convertirá en $k^2 A$ us

② $y = \sqrt{3}\, x$



$$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{3}\, x \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \end{array}\right\} \rightarrow \sqrt{3}\, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$$

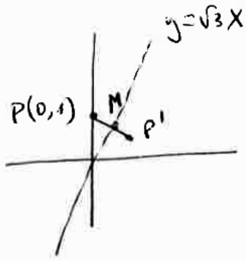
$$3x = -x + 1$$

$$4x = 1 \qquad x = \frac{1}{4} \longrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$M\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$P' = P + 2\,\overrightarrow{PM} = (1, 0) + 2\left(\frac{1}{4} - 1, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} - 2, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \boxed{*}$$



$$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{3}\, x \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + 1 \end{array}\right\} \quad \sqrt{3}\, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + 1$$

$$3x = -x + \sqrt{3}$$

$$4x = \sqrt{3}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{4} \longrightarrow y = \frac{3}{4}$$

$$M\left(\sqrt{3}/4, 3/4\right)$$

$$P' = P + 2\,\overrightarrow{PM} = (0, 1) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4} - 1\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{3}{2} - 2\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \boxed{**}$$

Luego $R = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ $\quad S = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $\quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

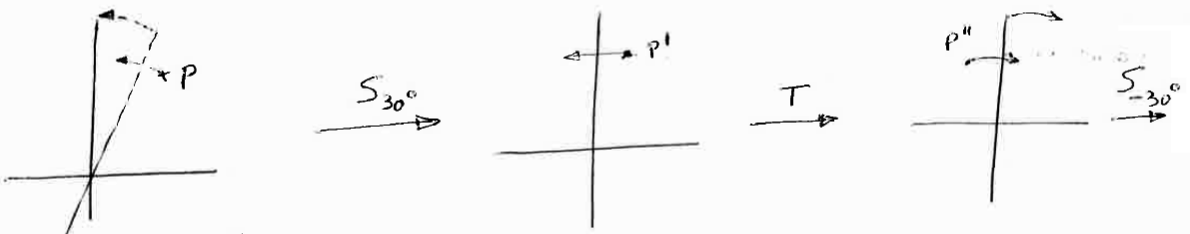
$\boxed{*}$ También: $(1 + 0i)\cdot 1_{120^\circ} = 1\cdot(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ) = \cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ =$

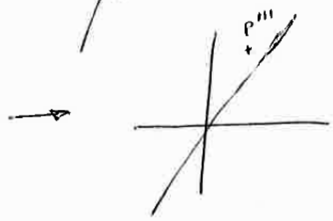
$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow P'\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\boxed{**}$ También: $(0 + 1\cdot i)\cdot 1_{-60^\circ} = i\left(\cos(-60^\circ) + i \operatorname{sen}(-60^\circ)\right) =$

$= i\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \Longrightarrow P'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b)





$$R = S_{-30°}\circ T\circ S_{30°}$$

d)

$$S^{-1}\cdot T\cdot S = \begin{pmatrix}\cos(-30°) & -\sin(-30°)\\ \sin(-30°) & \cos(-30°)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos 30° & -\sin 30°\\ \sin 30° & \cos 30°\end{pmatrix} =$$

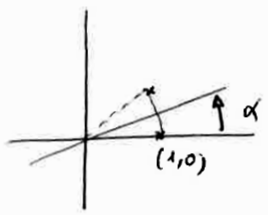
$$= \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & 1/2\\ -1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & -1/2\\ 1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & 1/2\\ -1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}/2 & 1/2\\ 1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix} = R$$

3)

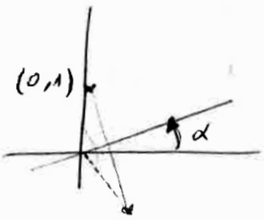
$$\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\ 0\end{pmatrix}$$

4)



$$(1+0i)\cdot 1_{2\alpha} = \cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha) \Rightarrow (\cos(2\alpha), \sin(2\alpha))$$

$$L\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos 2\alpha\\ \sin 2\alpha\end{pmatrix}$$



$$(0+1i)\cdot 1_{-2(90-\alpha)} = i\cdot 1_{-180+2\alpha} =$$

$$= i\left(\cos(-180+2\alpha) + i\sin(-180+2\alpha)\right) =$$

$$= i\left(-\cos(2\alpha) - i\sin(2\alpha)\right) =$$

$$= \sin(2\alpha) - i\cos(2\alpha) \Rightarrow (\sin(2\alpha), -\cos(2\alpha))$$

$$L\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin(2\alpha)\\ -\cos(2\alpha)\end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix}\cos(2\alpha) & \sin(2\alpha)\\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha)\end{pmatrix}$$

$$|L| = -\cos^2(2\alpha) - \sin^2(2\alpha) = -1$$

5)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a+b=2 \\ c+d=-4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a-b=0 \\ c-d=6 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \\ d=-5 \end{matrix}} \quad \boxed{L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}}$$

6) a) $y=-2x$ En paramétricas: $\begin{cases} x=t \\ y=-2t \end{cases}$

El punto transformado de $(t,-2t)$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ -2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+2t \\ -6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ -6t \end{pmatrix}$$

El punto $(3t,-6t)$ también pertenece a $y=-2x$.

b) Sea la recta $y=mx+n$

Un punto cualquiera de dicha recta: $P(t, mt+n)$

El punto transformado es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ mt+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-mt-n \\ -6t \end{pmatrix} \longrightarrow P'(t-mt-n, -6t)$$

P' debe pertenecer a la misma recta:

$-6t = m(t-mt-n)+n$ (para cualquier valor de t)

Por ejemplo, para $t=0 \Rightarrow 0=-mn+n \Rightarrow 0=n(1-m) \Rightarrow \begin{matrix} n=0 \\ \text{ó} \\ m=1 \end{matrix}$

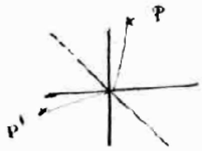
- $\boxed{n=0} \rightarrow -6t = m(t-mt) \Rightarrow -6 = m-m^2 \Rightarrow \begin{matrix} m=2 \\ \text{ó} \\ m=-3 \end{matrix}$

- $m=1 \rightarrow -6t=0 \Rightarrow t=0$ Absurdo, ya que debe cumplirse para cualquier valor de t.

Las rectas solución son: $y=2x$, $y=-3x$

7)

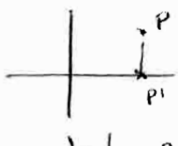
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$



Simetría en torno a la bisectriz del 2º cuadrante.

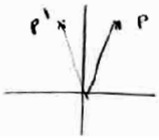
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3y \end{pmatrix}$$ Elongación del eje Y

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$



Proyección sobre el eje X

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$



Simetría en torno al eje Y