RECORDATORIO DEL CONCEPTO DE TENDENCIA DE UNA FUNCIÓN

El curso pasado estudiasteis la tendencia de una función. ¿Os acordáis que significa? Vamos a recordarlo.

En ocasiones nos interesa saber cómo se comporta la función cuando la variable independiente aumenta mucho o disminuye mucho o cuando se acerca a una valor concreto. A los valores a los que se aproxima es lo que llamamos **tendencia de la función**.

Cuando necesitamos conocer el valor de una función en un punto simplemente sustituimos el valor de x en la expresión analítica de la función y operamos para obtener su imagen. Lo que ocurre es que ciertas funciones tienen comportamientos "peculiares" en algunos puntos.

Estudiando el comportamiento de una función f(x) en alguna zona de su dominio, descubrimos si dicha función muestra algún tipo de ***tendencia*** *cuando tomamos valores de x muy próximos a un cierto punto, o bien cuando tomamos valores de x muy grandes positivos o muy grandes negativos*.

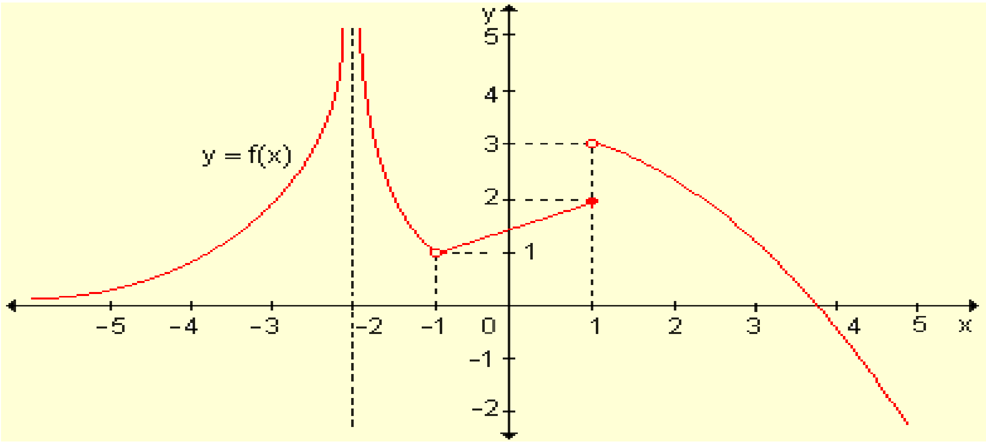
A este estudio es a lo que en matemáticas se le llama ***límite de un función:***

- límite de una función en un punto *cuando tomamos valores de x muy próximos a un cierto punto*

*-**límite de una función en el infinito*** *cuando tomamos valores de x muy grandes positivos o muy grandes negativos*.

1. ESTUDIO DE TENDENCIAS (LÍMITES) GRÁFICAMENTE

Observa la siguiente gráfica. Vamos a estudiar algunos comportamientos que nos llaman la atención en esta función:



a) ¿Qué ocurre con la función en las proximidades de x = -2?

Si tomamos valores de x muy próximos a -2, sus imágenes van siendo muy muy grandes, diríamos que tienden a + infinito.

b) ¿Qué ocurre con la función en las proximidades de x = -1?

Si tomamos valores de x muy parecidos a -1, sus imágenes se aproximan a 1 tanto como queramos (pero no llegan a tomar el valor 1 porque el punto (-1,1) está abierto).

c) ¿Qué ocurre con la función en las proximidades de x = 0?

Si tomamos valores de x muy próximos a 0, sus imágenes se aproximan a 1'5 tanto como queramos (llegando a tomar el valor 1'5 en x=0.

d) ¿Qué ocurre con la función en las proximidades de x = 1?

Ahora, si nos aproximamos a x=1 por su izquierda, la función se aproxima a 2 tanto como queramos, pero si nos aproximamos a x=1 por su derecha, la función se aproxima a 3 tanto como queramos.

e) ¿Qué ocurre si tomamos valores de x muy muy grandes pero negativos?

Observamos que, en este caso, las imágenes obtenidas (y) van siendo números cada vez más próximos a 0, llegando a ser tan pequeños como queramos.

f) Por último, ¿qué ocurre si tomamos valores de x muy muy grandes pero positivos?

En este caso, las imágenes obtenidas para dichos valores son cada vez más grandes en valor absoluto pero negativas.

¿Cómo representamos las tendencias que presenta esta función de forma resumida? Mira que simple:

a) $\lim_{x\to -2} f(x) = +\infty$ b) $\lim_{x\to -1} f(x) = 1$

c) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1'5$ d) $\lim_{x\to 1} f(x)$ *no existe*

e) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$ f) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

Y os preguntareis ¿cómo que $\lim_{x\to 1} f(x)$ *no existe*? Es fácil de entender. Fijaros la tendencia de la función no es siempre igual cuando nos aproximamos a 1:

- Si nos acercamos a 1 por valores memores que 1 la función tiende a 2: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$

- Si nos acercamos a 1 por valores memores que 1 la función tiende a 2: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$

Como la tendencia de la función es distinta según nos acerquemos a 1, se dice que:

$\lim_{x\to 1} f(x)$ *no existe*

2. ESTUDIO DE TENDENCIAS (LÍMITES) ANALÍTICAMENTE

El problema es que habitualmente no conoceremos la gráfica de la función y tendremos que hacer todo el estudio a partir de su expresión analítica.

Como irás descubriendo, el estudio de la tendencia de una función (en realidad el cálculo de límites) es una herramienta muy importante pues nos permitirá estudiar la continuidad de la función, la existencia de asíntotas...

Comenzaremos el estudio de los límites desde el punto de vista intuitivo, calculando imágenes de puntos adecuados y descubriendo su tendencia.

Ejemplo 1:

Supongamos que queremos estimar el comportamiento de la siguiente función en las proximidades de x = 2:

$$f(x) = x^2 - 3$$

Para ello, vamos a tomar valores de x cada vez más próximos a 2 y estudiaremos el comportamiento de sus imágenes. Pero lo vamos a hacer de forma ordenada.

Primero nos vamos a acercar a 2 por su derecha, es decir, con valores mayores que 2, tales como: 3, 2'5, 2'1, 2'05, 2'04, 2'03, 2'02, 2'01, 2'001, 2'0001... y hallaremos sus correspondientes imágenes:

x	3	2'5	2'1	2'05	2'04	2'03	2'02	2'01	2'001	2'0001
$f(x)$	6	3'25	1'41	1'2025	1'1616	1'1209	1'0804	1'0401	1'004001	1'00040001

Observa que las imágenes se aproximan muchísimo a 1. En este caso, diremos que la función tiende a 1 cuando x se aproxima a 2^+ o lo que es lo mismo que *el límite de la función cuando x tiende a 2 por la derecha es 1.*

A continuación, nos acercamos a 2 por su izquierda, es decir, con valores menores que 2, tales como: 1, 1'5, 1'7, 1'9, 1'95, 1'97, 1'98, 1'99, 1'999, 1'9999... y hallaremos sus correspondientes imágenes:

x	1	1'5	1'7	1'9	1'95	1'97	1'98	1'99	1'999	1'9999
$f(x)$	–2	–0'75	–0'11	0'61	0'8095	0'8809	0'9204	0'9601	0'996001	0'99960001

Comprobamos que las imágenes también se aproximan muchísimo a 1. En este caso, diremos que la función tiende a 1 cuando x se aproxima a 2^+ o lo que es lo mismo que *el límite de la función cuando x tiende a 2 por la izquierda también es 1.*

Y como tiende a 1 por la derecha y por la izquierda, diremos que *el límite de la función cuando x tiende a 2 es 1.*

$$\lim_{x\to 2}(x^2-3)=1$$

Fijaros en un detalle, calculamos el valor de la función cuando x = 2 ¿qué obtenemos?

$f(2)=2^2-3=4-3=1$

Por lo tanto podemos establecer que $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)\quad siendo\ a\in R$

Ejemplo 2:

Vamos a estudiar el comportamiento de la siguiente función alrededor del punto x=3:

$$f(x)=\frac{1}{x-3}$$

Para ello damos valores a x próximos a 3, primero por la izquierda y luego por la derecha:

x	2	2'5	2'9	2'99	2'999	...	$x\to 3^-$
$y=\frac{1}{x-3}$	-1	-2	-10	-100	-1000	...	$f(x)\to-\infty$

x	4	3'5	3'1	3'01	3'001	...	$x\to 3^+$
$y=\frac{1}{x-3}$	1	2	10	100	1000	...	$f(x)\to+\infty$

A medida que x tiende a 3 por la izquierda, la función toma valores tan grandes y negativos como queramos, y a medida que x tiende a 3 por la derecha, la función toma valores tan grandes y positivos como queramos. Es decir:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}=-\infty \quad y \quad \lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=+\infty$$

En este caso, diremos que:

$\lim_{x\to 3} f(x)=\ \infty\quad o\ que\ no\ existe$

Vamos a aplicar la conclusión a la que llegamos en el ejemplo anterior:

$f(3)=\frac{1}{3-3}=\frac{1}{0}$ y siempre os decíamos que $\nexists$ pues ahora sabemos que la tendencia de :

$f(x)\ cuando\ x\to 3\ sera\ \pm\infty$

Por lo tanto podemos establecer que $\lim_{x\to a} f(x)=\frac{K}{0}=\pm\infty\quad siendo\ K\in R$

Ejemplo 3:

Vamos a estudiar el comportamiento de la siguiente función cuando x toma valores muy muy grandes y muy muy pequeños y negativos:

$$f(x)=\frac{1}{x-3}$$

x	10	1000	1000000	1000000000	$x\to\infty$
x-3	7	993	999997	999999997	$(x-3)\to\infty$
$y=\frac{1}{x-3}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{993}$	$\frac{1}{999997}$	$\frac{1}{999999997}$	$f(x)\to 0^+$

x	-10	-1000	-1000000	-1000000000	$x \to -\infty$
x-3	-13	-1003	-1000003	-1000000003	$(x-3) \to -\infty$
$y = \frac{1}{x-3}$	$-\frac{1}{13}$	$-\frac{1}{1003}$	$-\frac{1}{1000003}$	$-\frac{1}{1000000003}$	$f(x) \to 0^-$

En este caso, diremos que:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \;\; y\; que \; \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Vamos a aplicar la conclusión a la que llegamos en el ejemplo 1:

$f(\pm\infty) = \frac{1}{\pm\infty-3} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$

Por lo tanto podemos establecer que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{K}{\pm\infty} = 0 \;\; siendo\; K \in R$