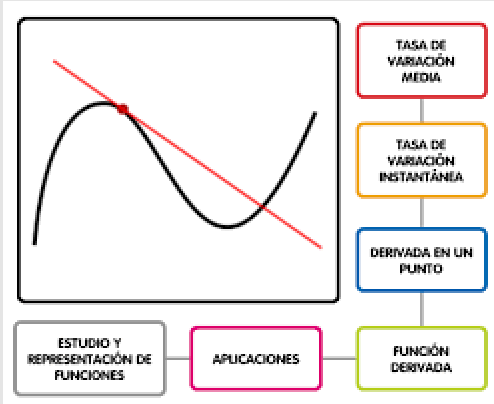
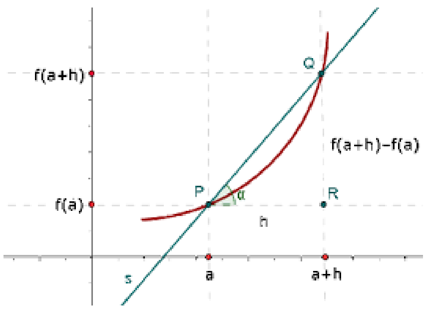
Unidad 12: Las derivadas y sus aplicaciones

Qué vamos a aprender



Tasa de variación media

de una función f(x) en el intervalo [a,b]



Mide la variación entre los valores que toma la función en los puntos a y b respecto de la diferencia entre los valores a y b. Es decir, cuánto crece la función en el intervalo [a,b].

$$TVM\, f[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Es la pendiente del segmento que une los puntos P(a,f(a)) y Q (b,f(b))

Si llamamos b=a+h, sustituyendo en la expresión anterior nos queda una forma análoga de definirla:

$$TVM\, f[a,a+h]=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si el intervalo [a,b] se hace cada vez más pequeño, la TVM se convierte en la Tasa de Variación Instantánea, que mide la variación de la función en un punto y estudiaremos en el siguiente apartado.

Derivada de una función en un punto.

Qué es una derivada

Es la tasa de variación media llevada al extremo de que el intervalo disminuya cada vez más hasta “convertirse en un punto”. Dado el intervalo [a,x], la derivada se obtiene haciendo que x se acerque todo lo posible a “a”, es decir, utilizando el concepto de límite:

$$f\,'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Función derivada

Cómo se calculan las derivadas de una función

Si existe la función derivada de f(x), es decir, si f(x) es derivable, su función derivada se calcula:

$$f\,'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Este cálculo da lugar a las funciones derivadas. Los resultados más importantes pueden verse en el siguiente apartado:

Tabla de derivadas

Cuál es la función derivada de las funciones tipo, expresión que se obtiene realizando los cálculos del apartado anterior

TABLA DE DERIVADAS

Simples		Compuestas	
Función	**Derivada**	**Función**	**Derivada**
$y = c$	$y' = 0$		
$y = x$	$y' = 1$		
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = f(x)^n$	$y' = nf(x)^{n-1} f'(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$
$y = a^x$ con $a > 0$	$y' = a^x \ln a$	$y = a^{f(x)}$ con $a > 0$	$y' = f'(x) a^{f(x)} \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = f'(x) e^{f(x)}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \log_a e$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \log_a e$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$	$y = \operatorname{sen} f(x)$	$y' = f'(x) \cos f(x)$
$y = \cos x$	$y = -\operatorname{sen} x$	$y = \cos f(x)$	$y = -f'(x) \operatorname{sen} f(x)$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$y = \operatorname{tg} f(x)$	$y' = f'(x)[1 + \operatorname{tg}^2 f(x)]$
$y = \operatorname{arcsen} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \operatorname{arcsen} f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos f(x)$	$y' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arctg} f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$

1

Cipri *Departamento de Matemáticas*

Derivadas de operaciones de funciones

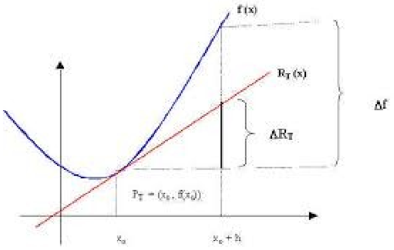
Operaciones

Operación	Derivada
$k \in R$; Producto de constante por función	$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$
Suma y resta de funciones	$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
Producto de funciones	$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Inversa de una función	$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$
Cociente de funciones	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
Composición de funciones (Regla de la cadena)	$(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$

Aplicaciones

Para qué sirven las derivadas

A) Recta tangente a una función en un punto



A) <u>Cálculo de la recta tangente a una función en un punto:</u>

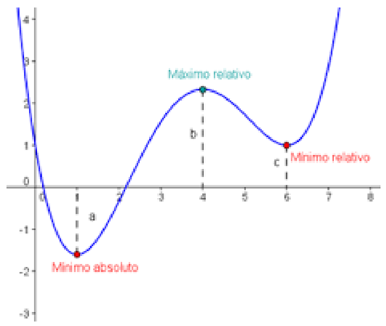
La forma punto-pendiente de la recta es:

$$y-b=m(x-a) \quad ,$$

siendo (a,b) el punto de la función en el que buscamos la recta tangente.

$$m=pendiente\ de\ la\ recta=f\,'(a)$$

B) Crecimiento de una función, máximos y mínimos.



<u>B) Crecimiento, máximos y mínimos</u>

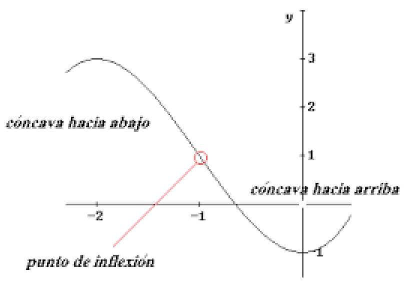
En un punto x=c, una función es:

- Creciente: si $f\,'(c)>0$
- Decreciente: si $f\,'(c)<0$
- Tiene un extremo relativo: si $f\,'(c)=0$

Ese extremo relativo será un:

- Mínimo relativo: si $f\,''(c)>0$
- Máximo relativo: si $f\,''(c)<0$

C) Concavidad y puntos de inflexión



<u>C) Concavidad y puntos de inflexión de una función:</u>

En un punto x=c, una función es:

- Cóncava hacia arriba: si $f\,''(c)>0$
- Cóncava hacia abajo: si $f\,''(c)<0$

- Tiene un punto de inflexión: si $f\,''(c)=0$

Ejemplos resueltos:

Ejemplo 1: Vamos a estudiar la función $f(x)=\frac{x^2-4}{x}$

Estudiar una función es analizar todas las características que podamos: dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes, continuidad, asíntotas, crecimiento, máximos y mínimos, concavidad, puntos de inflexión, … El objetivo es poder, con esa información, representarla gráficamente:

A) Dominio de f(x):

Debe ser $x\neq 0$ Por tanto: $Dom f(x)=\Re\setminus\{0\}$.

B) Puntos de corte con los ejes:

Eje de las X: y = 0: $\frac{x^2-4}{x}=0$; $x^2-4=0$; $x=\pm 2$; f(x) corta al eje X en dos puntos: (2,0) y (-2,0)

Eje de las Y: x=0: $y=\frac{0^2-4}{0}$ No tiene sentido, pues x=0 no está en el dominio de f(x). Es decir, f(x) no corta al eje Y

C) Continuidad:

Dada su expresión analítica, una función podrá no ser continua en puntos donde veamos "problemas", "cosas raras", algo que no va bien…..

f(x) no puede ser continua en x=0 porque, tal y como ya hemos visto al estudiar su dominio, la función ni siquiera existe en ese punto. Vamos a estudiar qué tipo de discontinuidad presenta:

x=0: f(0) no existe

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4}{x}=\{\frac{-4}{0}\}$ presenta una indeterminación. Este límite no existe, pues a la izquierda del cero toma valores positivos (tiende a infinito) y a la derecha toma valores negativos (tiende a menos infinito)

Por tanto, en x=0 la función presenta una discontinuidad de salto infinito.

Existen varios tipos de intetermінaciones, son expresiones de las que no sabemos su valor:

$\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 . *Existen técnicas para resolver cada una de ellas, lo aprenderéis.*

D) Simetrías:

$f(-x)=\frac{(-x)^2-4}{-x}=\frac{x^2-4}{-x}=-\frac{x^2-4}{x}=-f(x)$. Por tanto, la función es impar, es decir, simétrica respecto del origen.

E) Asíntotas:

- Asíntotas verticales: en x=0, las ramas laterales han sido estudiadas en el apartado anterior.

- Asíntotas horizontales: no tiene, pues $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

Estos límites son infinito porque tenemos un cociente de polinomios en el que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador. Por tanto, el numerador crece más rápido, es " el que manda" y se dirige a infinito.

- Asíntotas Oblicuas:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^2}=1$$,

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4-x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{x}=0$$

El valor de m es 1 porque los polinomios del cociente tienen el mismo grado (o sea, "mandan lo mismo"), y por tanto el resultado es el cociente de los coeficientes de los términos principales de cada uno de ellos.
El valor de n es 0 porque el denominador tiene mayor grado, es "el que manda". Se piensa diciendo que tengo 4 caramelos divididos entre infinitas personas, ¿a cuánto tocan cada una de ellas? Pues a nada....

Existe por tanto una asíntota oblícua de ecuación: y=x

F) Crecimiento, máximos y mínimos:

Para estudiar el crecimiento de una función debemos calcular su derivada, y luego analizamos dónde toma valores positivos (la función será creciente), negativos (la función será decreciente) y donde vale cero (Ahí tendrá los máximos y los mínimos).

$f'(x)=\frac{2x\cdot x-(x^2-4)}{x^2}=\frac{2x^2-x^2+4}{x^2}=\frac{x^2+4}{x^2}$ Esta función nunca vale 0, y nunca toma valores negativos. Por tanto, la función es siempre creciente.

G) Concavidad y puntos de inflexión:

Para estudiar la concavidad de una función debemos hacer su segunda derivada (es decir, la derivada de su derivada), y luego analizamos dónde toma valores positivos (la función será cóncava hacia arriba), donde toma valores negativos (la función será cóncava hacia abajo) y donde vale cero (ahí tendrá los puntos de inflexión)

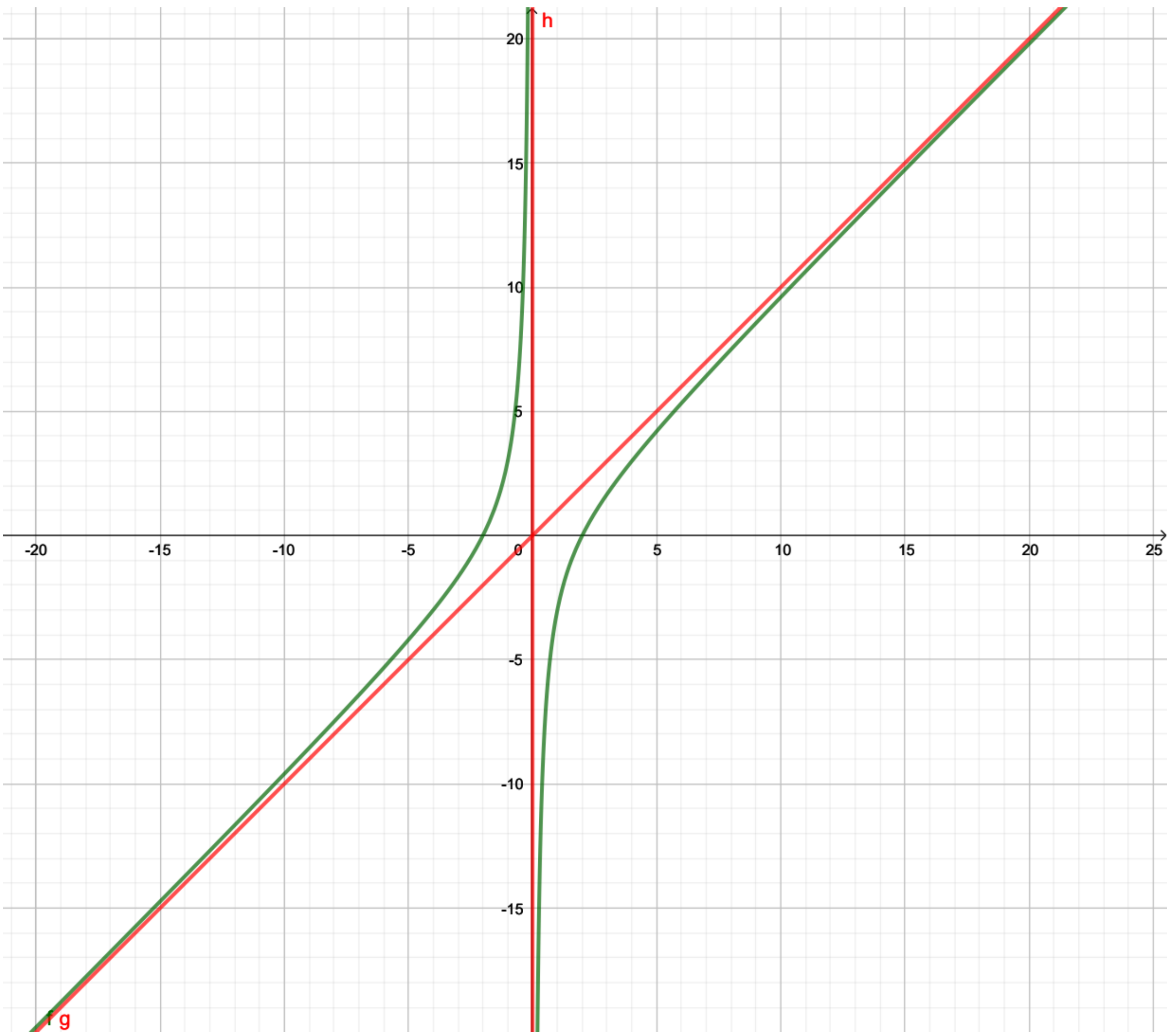
$$f''(x)=\frac{2x\cdot x^2-(x^2+4)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2x^3-2x^3-8x}{x^4}=\frac{-8}{x^3}$$

Esta función nunca vale cero, por tanto, no tiene puntos de inflexión.

Si x<0, la segunda derivada toma valores positivos, por tanto, es cóncava hacia arriba.

Si x>0, la segunda derivada toma valores negativos, por tanto, es cóncava hacia abajo.

Si en un eje de coordenadas representamos todo esto, vemos la forma que tiene la función:



Ejemplo 2: $f(x)=x^4+1$

A) Dominio de f(x): $Dom f(x)=\Re$.

B) Puntos de corte con los ejes:

Eje de las X: y = 0: $x^4+1=0$, no tiene solución, por tanto la función no corta al eje X
Eje de las Y: x=0: $y=0^4+1=1$, la función corta al eje Y en (0,1)

C) Continuidad: f(x) es continua en todo su dominio

D) Simetría:

$f(-x)=(-x)^4+1=x^4+1=f(x)$: La función es par, esto es, simétrica respecto del eje Y.

E) Asíntotas:

- Asíntotas verticales: no tiene

- Asíntotas horizontales: no tiene, pues $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

- Asíntotas Oblicuas:

no tiene, pues $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+1}{x}=\infty$, no puede ser.

F) Crecimiento, máximos y mínimos:

$f´(x)=4x^3$

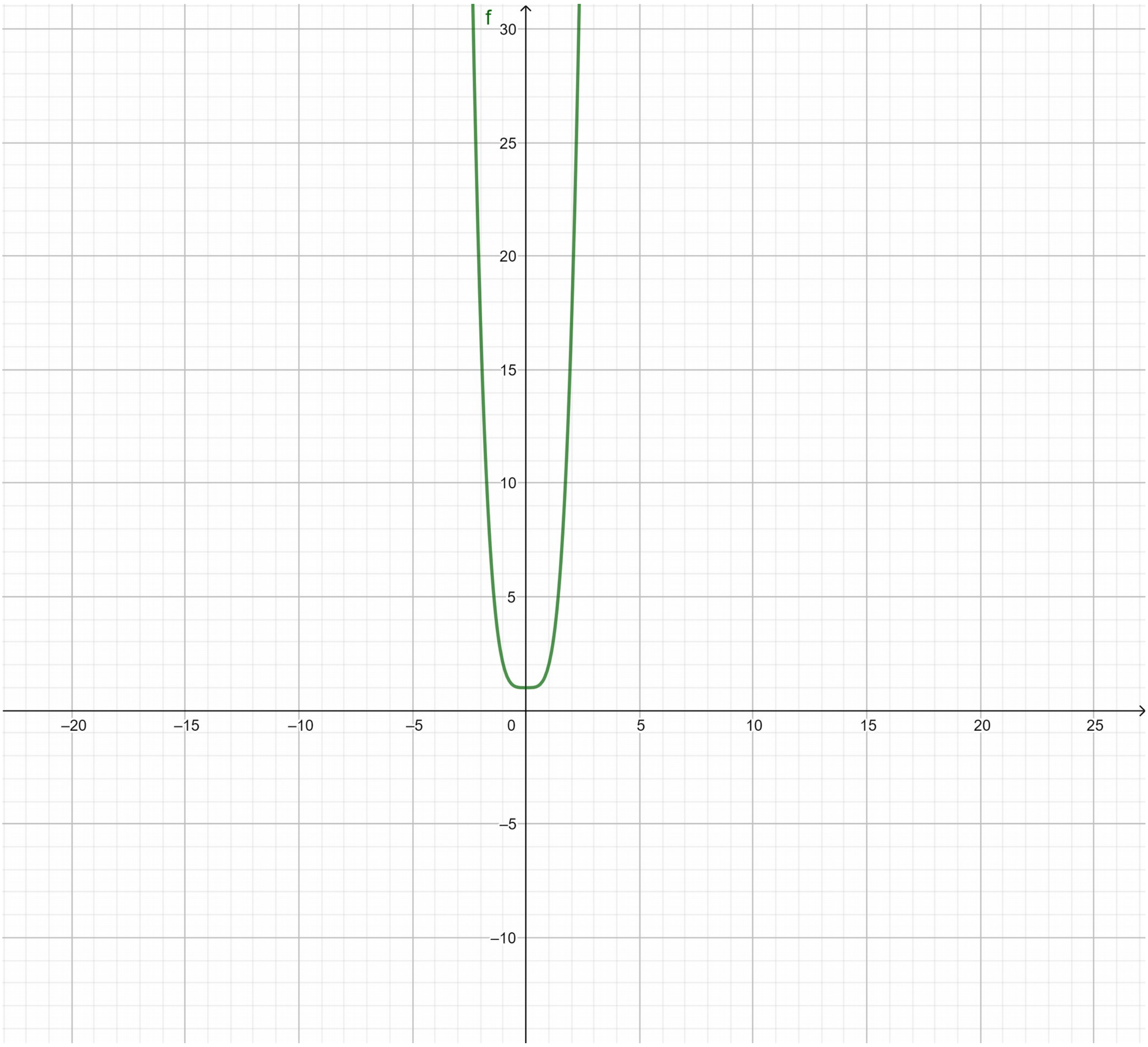
Para valores anteriores a x=0 es negativa, luego f es decreciente
Para valores posteriores a x=0 es positiva, luego f es creciente.
Como en x=0 la derivada vale 0, ahí tendríamos un máximo o un mínimo. Pero es evidente que se trata de un mínimo, puesto que antes la función decrece y luego es creciente.

G) Concavidad y puntos de inflexión:

$f´´(x)=12x^2$ Esta función toma siempre valores positivos, por tanto siempre es cóncava hacia arriba y no tiene puntos de inflexión.

OJO: es cierto que se anula en x=0, pero eso realmente significa que en x=0 ***<u>podría</u>*** *haber un punto de inflexión, y en este caso no lo es porque no cambia la concavidad.*

Si en un eje de coordenadas representamos todo esto, vemos la forma que tiene la función:



Ejemplo 3: $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2-2x}$

A) Dominio de f(x): $x^2-2x=0; x\cdot(x-2)=0; x=0,2 \qquad Dom f(x)=\Re \setminus \{0,2\}$.

B) Puntos de corte con los ejes:

Eje de las X: y = 0: $x^2+2=0$, no tiene solución, por tanto la función no corta al eje X

Eje de las Y: x=0: $y=\frac{0^2+2}{0^2-0}$, no tiene solución, puesto que la función no está definida en x=0

La función no corta a los ejes.

C) Continuidad: la función es continua en todos los puntos salvo en x=0 y en x=2, donde no está definida. Estudiemos qué tipo de discontinuidad presenta en cada caso:

X=0: si estudiamos los límites laterales:

Por la izquierda: $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2}{x^2-2x}=\{\frac{2}{0}\}=+\infty$

Por la derecha: $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2}{x^2-2x}=\{\frac{2}{0}\}=-\infty$

Por lo tanto, en x=0 presenta una discontinuidad de salto infinito.

X=2: si estudiamos los límites laterales:

Por la izquierda: $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} \frac{x^2+2}{x^2-2x}=\{\frac{6}{0}\}=-\infty$

Por la derecha: $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} \frac{x^2+2}{x^2-2x}=\{\frac{6}{0}\}=+\infty$

Por lo tanto, en x=2 también presenta una discontinuidad de salto infinito.

D) Simetría:

$f(-x)=\frac{(-x)^2+2}{(-x)^2-2(-x)}=\frac{x^2+2}{x^2+2x}$, luego la función no es simétrica

E) Asíntotas:

- Asíntotas verticales: en x=0 y en x=2, y las ramas ya se han estudiado en el apartado de continuidad.

- Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x^2-2x}=1$ Tiene una asíntota horizontal en y=1

- Asíntotas Oblicuas: No tiene, por tener horizontales.

F) Crecimiento, máximos y mínimos:

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-2x)-(x^2+2)(2x-2)}{(x^2-2x)^2}=\frac{2x^3-4x^2-2x^3+2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2}=\frac{-2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2}=\frac{-2(x^2+2x-2)}{(x^2-2x)^2}$$

Para conocer el signo de esta expresión y donde vale cero, resolvemos la ecuación:

$$x^2+2x-2=0;\ x=\frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{2}=-1\pm\sqrt{3}$$

Veamos cómo se porta la derivada entre esos puntos:

Este estudio se hace a través de una tabla en la que OJO!!!!! separamos en intervalos utilizando los puntos que anulan la derivada, pero TAMBIÉN los que no pertenecen al dominio, porque ahí pueden producirse cambios también.

En cada intervalo elegimos un punto cualquiera, sustituimos en la derivada y anotamos en la tabla el signo del resultado obtenido. Donde obtenemos signo negativo, la función es decreciente y donde el signo es positivo, la función es creciente.

x	(-∞,-1-√3)	-1-√3	(-1-√3,0)	0	(0,-1+√3)	-1+√3	(-1+√3,2)	2	(2,∞)
f´(x)	-	0	+	∄	+	0	-	∄	-
f(x)	Decrec	Mín	Crec	∄	Crec	Máx	Decrec	∄	Decrec

G) Concavidad y puntos de inflexión:

$$f''(x)=\frac{(-4x-4)(x^2-2x)^2-(-2x^2-4x+4)2(x^2-2x)(2x-2)}{(x^2-2x)^4}=\frac{(-4x-4)(x^2-2x)-(-2x^2-4x+4)2(2x-2)}{(x^2-2x)^3}$$

$$\frac{-4x^3+8x^2-4x^2+8x+8x^3-8x^2+16x^2-16x-16x+16}{(x^2-2x)^3}=\frac{4x^3+12x^2+8x-24x+16}{(x^2-2x)^3}$$

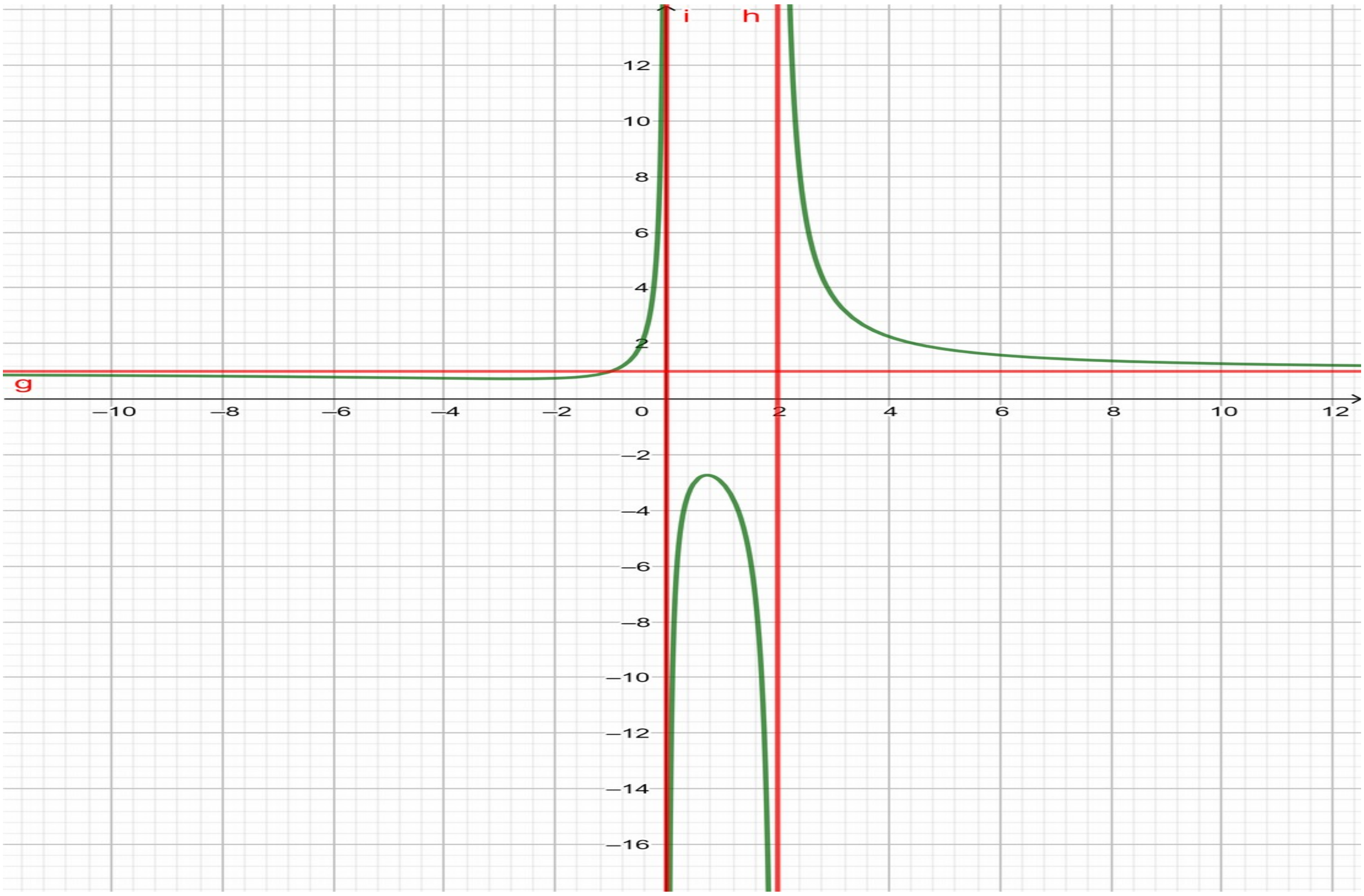
Esta función no se anula en ningún punto, así que no tiene puntos de inflexión.

Este estudio se hace a través de una tabla en la que OJO!!!!! separamos en intervalos utilizando los puntos que anulan la segunda derivada, pero TAMBIÉN los que no pertenecen al dominio, porque ahí pueden producirse cambios también.

En cada intervalo elegimos un punto cualquiera, sustituimos en la segunda derivada y anotamos en la tabla el signo del resultado obtenido. Donde obtenemos signo negativo, la función es cóncava hacia abajoy donde el signo es positivo, la función es cóncava hacia arriba.

x	(-∞,0)	0	(0,2)	2	(2,∞)
f´´(x)	-	∄	+	∄	-
f(x)	Cóncava hacia arriba	∄	Cóncava hacia abajo	∄	Cóncava hacia arriba

Si en un eje de coordenadas representamos todo esto, vemos la forma que tiene la función:



Ejercicios y problemas:

1. Estudia todas las características y representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^3-x$ b) $f(x)=\sqrt{x-3}$ c) $f(x)=\frac{x-1}{2x+1}$

d) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ e) $f(x)=\frac{4x}{x^2-2x}$ f) $f(x)=\frac{2x^2+3x}{x-2}$

(recuerda:puedes comprobar con Geogebra la representación gráfica)

2. Calcula ta recta tangente a las funciones del ejercicio anterior en el punto que se cita:

a) en x=0 b) en x=5 c) en x= 2 d) en x=0 e) en x= 1 f) en x= -1