CALCULADORA GRÁFICA.

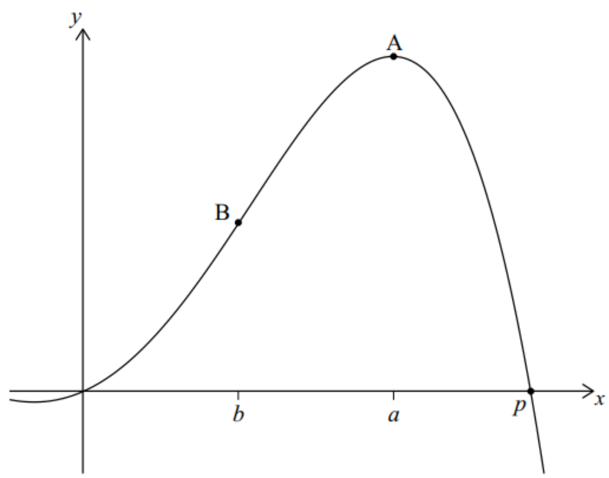
(Gráfica de funciones, <u>derivadas primera y segunda</u>)

Solución del ejercicio nº 8, de la SP2 del examen de Matemáticas de BI NM de 2017

Ejercicio hecho a continuación con *f(x)* = - 0,5x^4+3x^2+4*x*, el procedimiento es el mismo

8. [Puntuación máxima: 15]

Sea $f(x) = -0{,}5x^4 + 3x^2 + 2x$. La siguiente figura muestra una parte del gráfico de f.



Los cortes con el eje x están en $x = 0$ y en $x = p$. Hay un máximo en A donde $x = a$, y un punto de inflexión en B donde $x = b$.

(a) Halle el valor de p. [2]

(b) (i) Escriba las coordenadas de A.

(ii) Escriba la razón de cambio de f en A. [3]

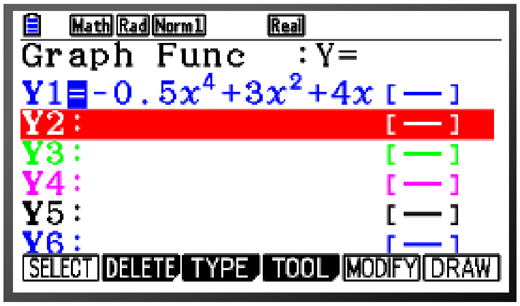
(c) (i) Halle las coordenadas de B.

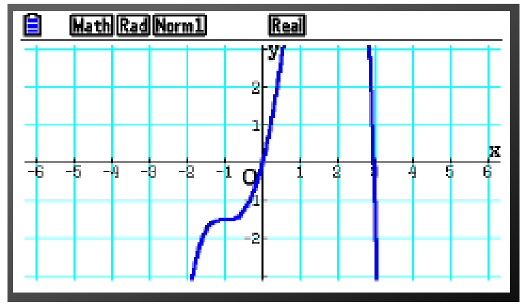
(ii) Halle la razón de cambio de f en B.

(d) Sea R la región delimitada por el gráfico de f, el eje x, la recta $x = b$ y la recta $x = a$. La región R se rota 360° alrededor del eje x. Halle el volumen del sólido de revolución así generado. [3]

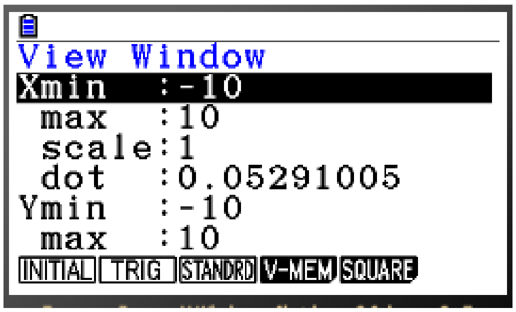
e) Ahora, una pregunta extra. Calcular el área de la región encerrada por la función, el eje x y las rectas x=b y x=a

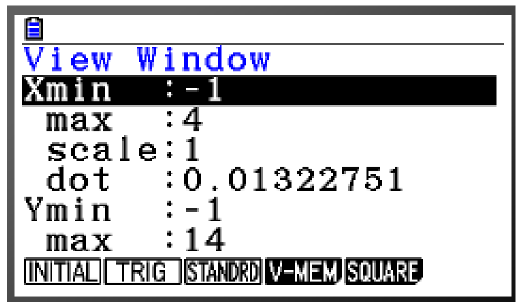
Para empezar representamos la función y elegimos la escala en donde se vea adecuadamente:



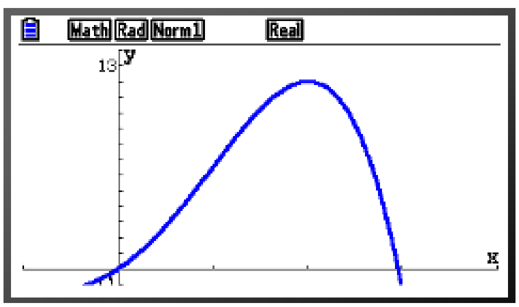


Ajustamos la escala gráfica probando una y otra vez:





Al final quedará más o menos así:



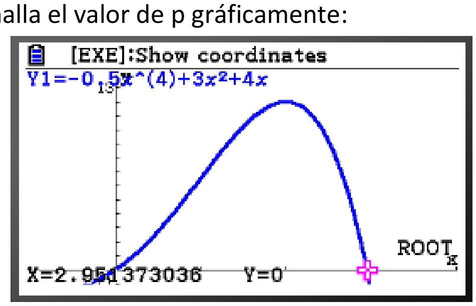
Los cortes con el eje x están en $x = 0$ y en $x = p$. Hay un máximo en A donde $x = a$, y un punto de inflexión en B donde $x = b$.

(a) Halle el valor de p. [2]

(b) (i) Escriba las coordenadas de A.

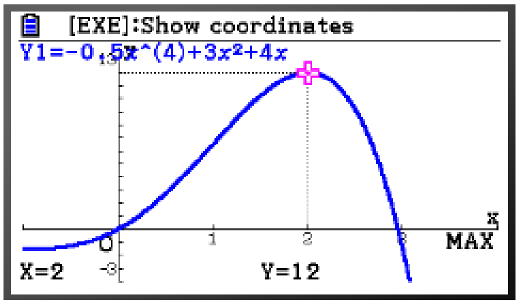
(ii) Escriba la razón de cambio de f en A. [3]

a) Se halla el valor de p gráficamente:



Aproximadamente p ≈ 2.95

b) i) Se halla con CG:



a=2, luego coordenadas de A= (2, 12)

ii) Se halla el valor de la derivada (razón de cambio) en x=2 con la calculadora, pero no es necesario, ya que es un máximo y sabemos que su derivada vale 0.

Razón de cambio = $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$

(c)	(i)	Halle las coordenadas de B.	
	(ii)	Halle la razón de cambio de f en B.	[7]

c) i)

OPCIÓN A: Nadie nos libra de hacer alguna derivada. Es un función polinómica

$f'(x) = \ldots$

$f''(x) = \ldots$

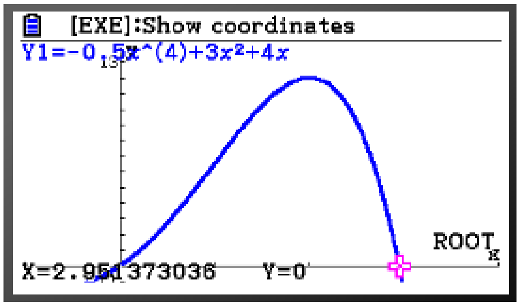
Es fácil las igualamos a 0 y hallaremos respectivamente los máximos y mínimos y los puntos de inflexión que nos interesan. Pero he dicho al comienzo del problema que haremos el problema a tope con la calculadora, así que,

OPCIÓN B GRÁFICA:

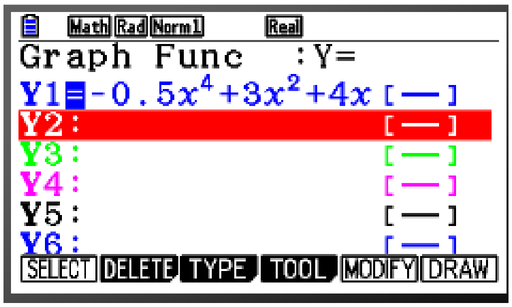
El punto B es un punto de inflexión, y en él la derivada segunda es 0. También en el punto B, la pendiente de la recta tangente a f(x) es máxima. Así que tenemos dos modos de hacerlo gráficamente.

OPCIÓN B1, CON LA DERIVADA PRIMERA:

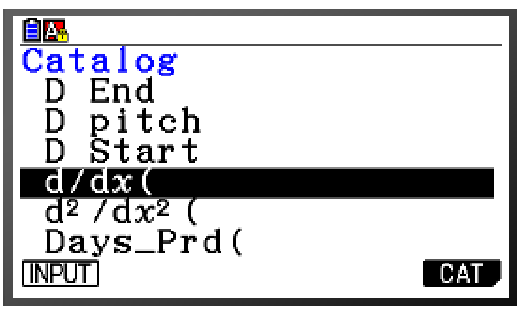
Representamos la función (que ya la tenemos):



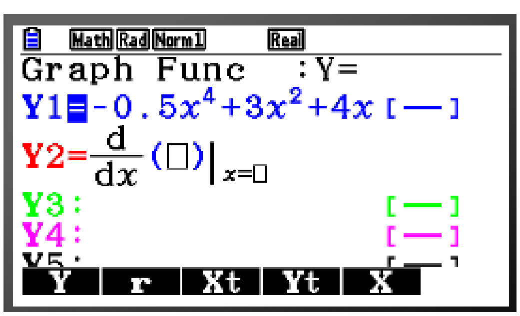
y añadimos la representación de su derivada primera. Para ellos no vamos a la pantalla de introducción de fórmulas,



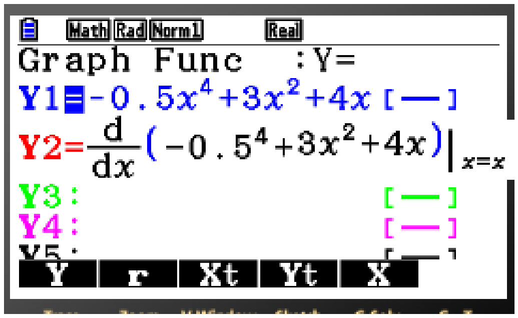
Tecleamos SHIFT y la tecla 4 (CATALOG) y escogemos la derivada primera:



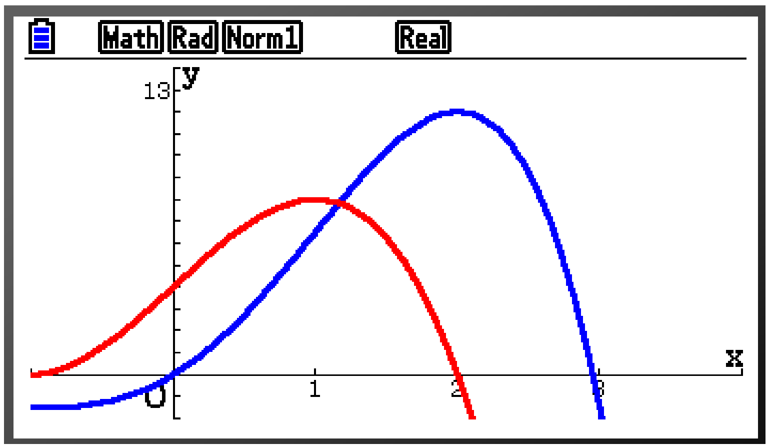
Ahora tecleamos la función a la que le va a hacer la derivada para representar. En el **valor de la x, escribir x,** para que represente la función:



Quedará así:



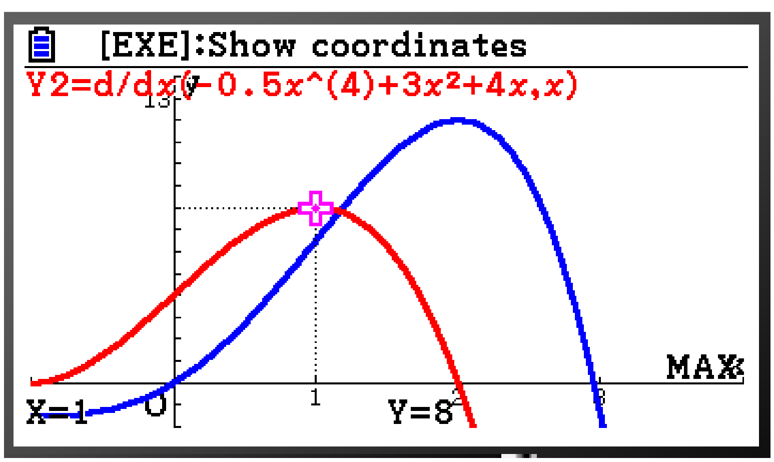
Ahora las dibujamos las dos:



Recordad que la derivada en el máximo (tangente horizontal) de la función azul vale 0, y la roja que es la función derivada, observamos que vale 0 en x=2

La recta tangente, a lo largo de la función azul entre 0 y 2, parece que tiene un máximo de pendiente alrededor de x=1.

La función roja es la derivada (pendiente de la recta tangente) de la función azul, y vemos que tiene ese máximo alrededor de x=1, comprobemos que efectivamente está alrededor de x= 1 hallando con la calculadora el máximo de la función roja:



Efectivamente tiene el máximo la derivada primera en x=1, es decir máximo de pendiente de la rectas tangentes a lo largo de la función azul. Que es precisamente el punto de inflexión.

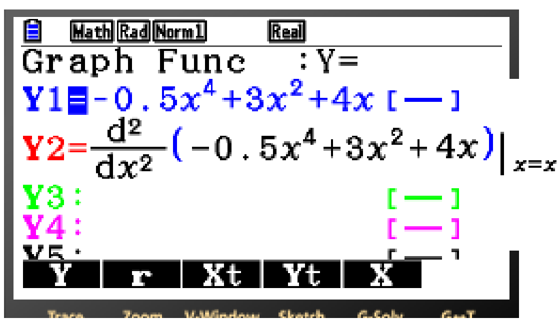
Luego b=1.

OPCIÓN GRÁFICA B, CON LA DERIVADA 2ª:

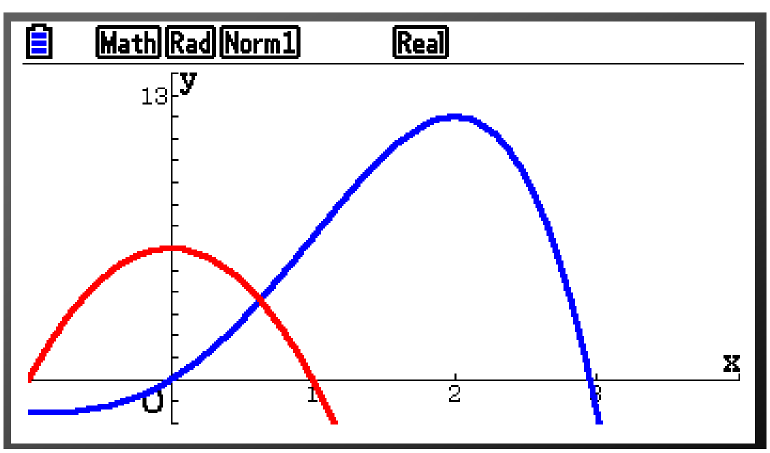
Creo que es más sencilla. Borraré la derivada primera para que no interfiera en la exposición. Recordar, que en el punto de inflexión, la derivada segunda vale 0.

Del mismo modo que hemos hecho la gráfica de la derivada primera, haremos la gráfica de la derivada segunda con la opción CATALOG cuando estamos introduciendo las fórmulas:

y tecleamos la la función f(x), pero habiendo escogido la derivada segunda repito

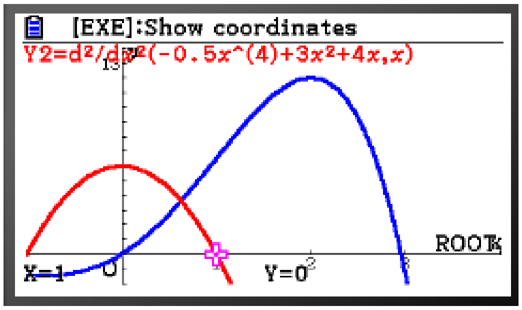


Representamos f(x) y su derivada segunda:



La función azul es f(x) y la función roja es f’’(x).

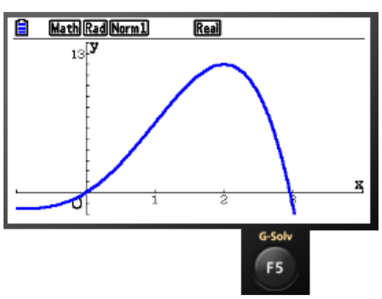
Esta última (derivada segunda) vale 0, en el punto de intersección con el eje x,

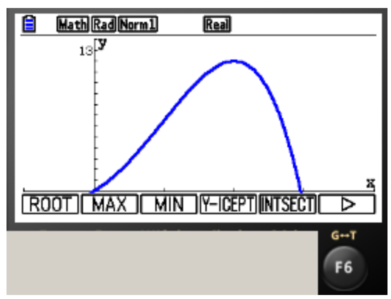


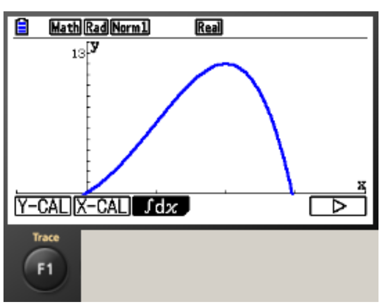
que es en x=1. Si la derivada segunda vale 0, y a la vista de f(x),estamos ante un punto de inflexión.

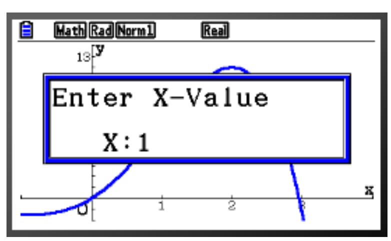
Luego b=1

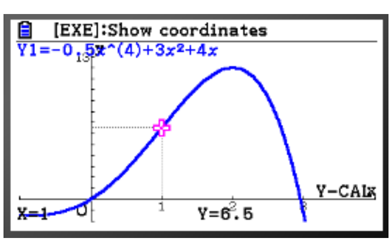
Pero, se piden las coordenadas de B, así que con la calculadora, en la gráfica de f(x) y en el modo gráfico, la dibujamos, teclearemos SHIFT y F5 (G-Solve), a continuación presionamos F6(>). En este momento presionaremos F1 (Y-CAL), introduciremos el valor x=1, y nos da el valor Y de la función:











Luego las coordenadas pedidas de B = (1, 6.5)

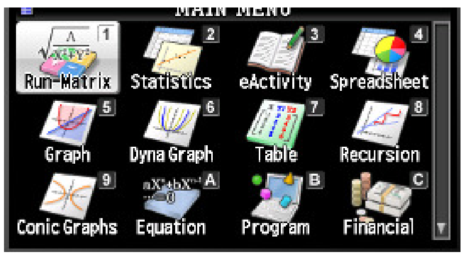
c) ii)

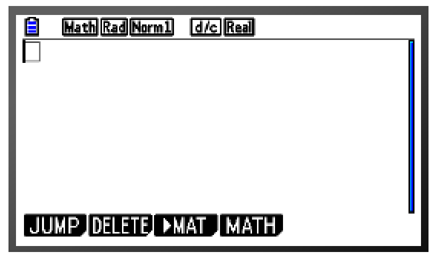
<u>RAZÓN DE CAMBIO</u> de f en B, es decir la derivada (derivada primera) en x=1

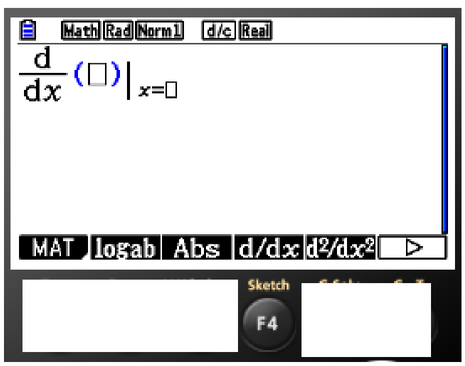
$$Razón\ de\ cambio = \frac{dy}{dx} = f'(x).\ En\ x = 1,\ f'(1).$$

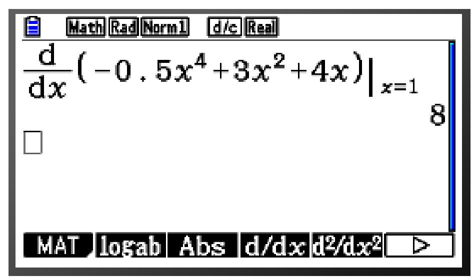
Si no queremos hacer la derivada, la calculadora la hace por nosotros. Tenemos dos formas, analíticamente y gráficamente:

<u>ANALÍTICAMENTE:</u> La calculadora la hace. Teclear el modo matemáticas: y dentro de él MATH, la opción F4 hace la derivada:





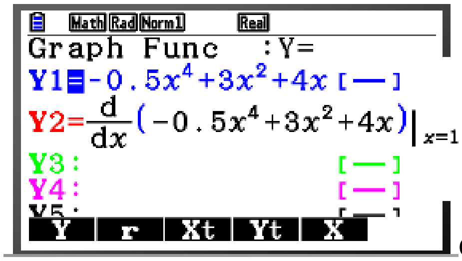




Tecleamos EXE, y el resultado para x=1 de la derivada primera es de 8.
Luego la razón de cambio es 8.

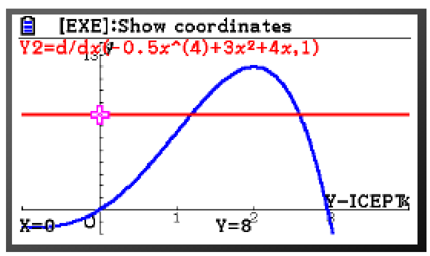
(Del mismo modo podríamos hallar valores concretos de la derivada segunda, escogiendo F5 anteriormente)

<u>GRÁFICAMENTE:</u> Como ya teníamos representadas las gráficas de todas la funciones. Escogeremos para representar solamente f(x), y la derivada primera, pero esta vez en lugar de en el punto x genérico, escogeremos en el punto a calcular la derivada numérica, que es en x=1



Como la derivada, va a dar un valor numérico, lo que realmente va a representar es la recta horizontal:

$$y = valor\ numerico\ de\ la\ derivada$$



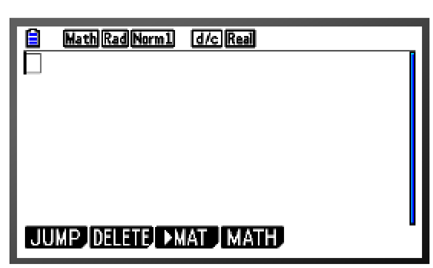
Hallamos la intersección de la recta con el eje y. Ese es el valor de la función derivada en x=1, Es decir la razón de cambio pedida en x=b, resulta ser 8. Recta y=8

(d)	Sea R la región delimitada por el gráfico de f, el eje x, la recta $x=b$ y la recta $x=a$. La región R se rota 360° alrededor del eje x. Halle el volumen del sólido de revolución así generado.	[3]

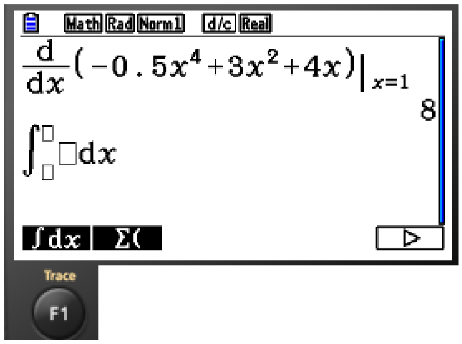
La fórmula del volumen generado está en el listado de fórmulas permitidas:

Volumen de revolución alrededor del eje x desde $x=a$ hasta $x=b$	$V = \int_a^b \pi y^2\,\mathrm{d}x$

La calculadora la hace directamente. Teclear el modo matemáticas: y dentro de el MATH, opción F4 hace la integral:



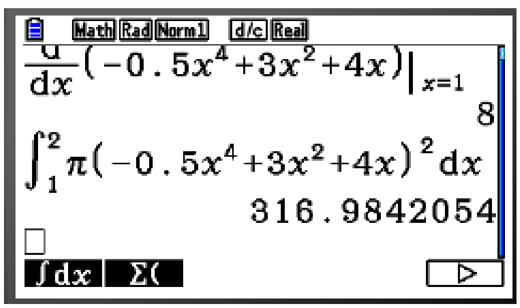
Presionar F1,



y teclear los datos de la integral pedida:

F(x), datos del problema b=1, a=2 . Pero ojo, para meter los datos en la integral y que se calcule correctamente, el valor inferior es el que está más a la izquierda, y el superior el que está más a la derecha, es decir, los a y b de la fórmula no coinciden con cómo ha llamado el problema a a y b.

Datos del problema a=2, b=1
Datos para la calculadora, a= valor situado más a la izquierda= 1, b=valor situado más a la derecha=2, por lo tanto quedará:



Presionamos EXE y da 316.984 unidades cúbicas

Ahora, una pregunta extra.

Calcular el área de la región encerrada por la función, el eje x y los rectas x=b y x=a

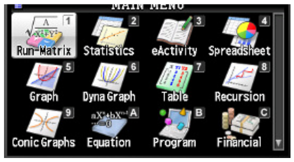
La fórmula del área encerrada, también viene en el listado de fórmulas permitidas:

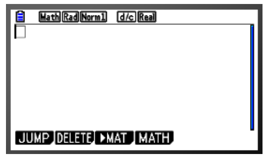
Área bajo una curva entre $x = a$ y $x = b$	$A = \int_a^b y\,\mathrm{d}x$

La diferencia con el volumen anterior, es que además de poder hacerla analíticamente, también se puede resolver gráficamente:

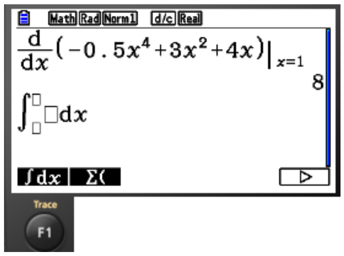
ANALÍTICAMENTE:

La calculadora la hace directamente igual que antes. Teclear el modo matemáticas: y dentro de el MATH, opción F4 hace la integral:

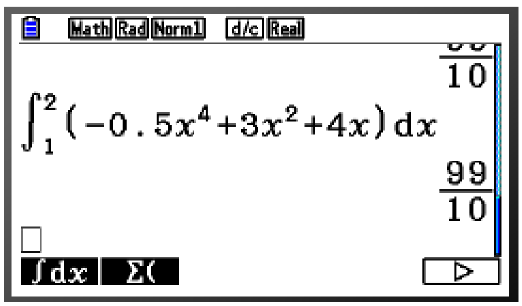




Presionar F1,



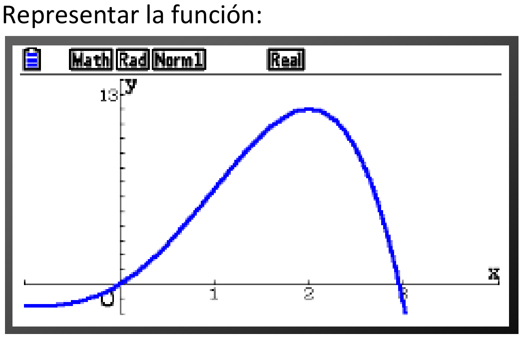
y teclear los datos de la integral pedida, ojo con la fórmula que es distinta que la del volumen:

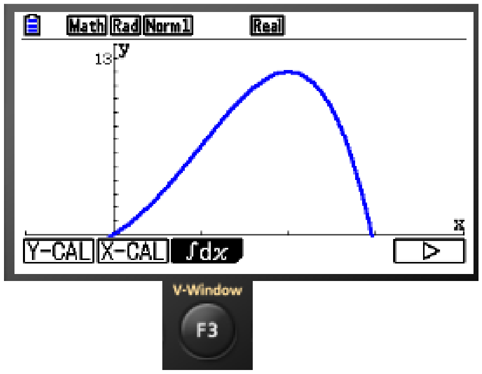


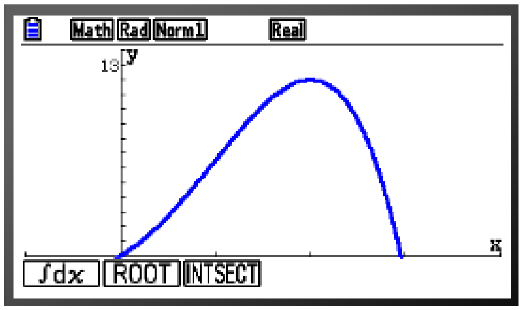
Luego, el área es de 99/100 unidades cuadradas.

GRÁFICAMENTE:

Representar la función:


Presionar SHIFT y después F5 (G-Solv), a continuación F6 (>), y por último F3 para hacer la integral gráficamente:



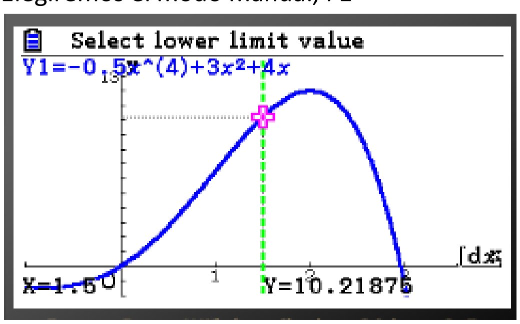


Tenemos tres opciones (o cuatro opciones en CASIO CG-50), la primera F1, calculará la integral (área) entre los límites que pongamos manualmente.

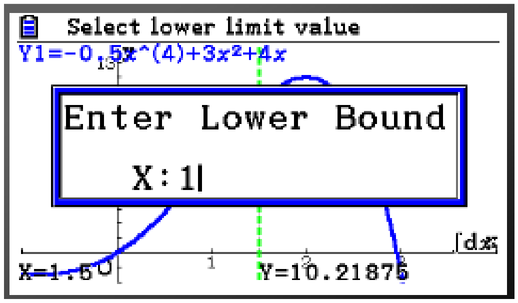
F2 (ROOT), para calcular el área entre la función, el eje x y las raíces o puntos de corte con el eje x si los tiene.

F3 (INTSECT) para calcular el área entre dos funciones, y sus puntos de intersección.

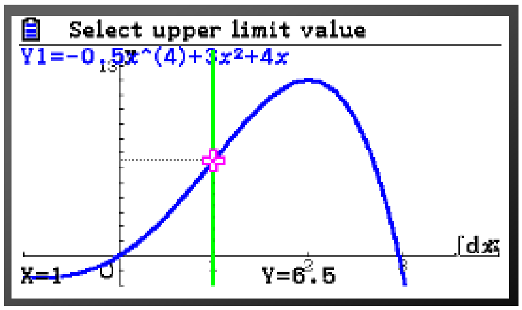
Elegiremos el modo manual, F1



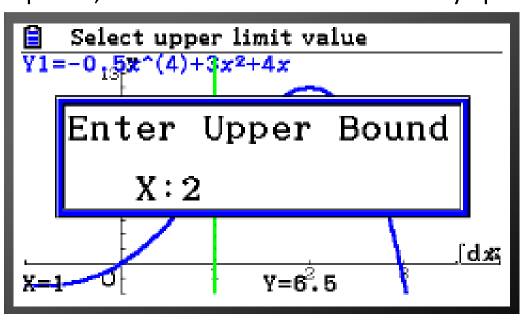
Aparece una pantalla, con una línea vertical en verde que podemos mover con las flechas del cursor, para situar el límite inferior de la integración. Haremos caso omiso del movimiento con el cursor, que se mueve a intervalos muy grandes y teclearemos directamente con números el límite inferior en la calculadora, en este caso, el límite inferior es 1, así que tecleamos el número 1, aparece la siguiente pantalla:



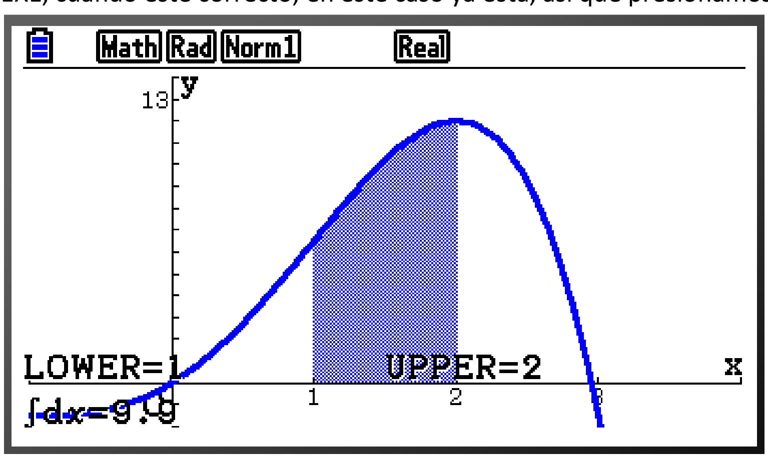
Confirmamos o corregimos, en este caso confirmamos tecleando EXE y aparece:



La línea vertical verde, ahora es continua porque se ha confirmado el límite inferior, y no pide el límite superior, podemos mover la línea con el cursor, o mejor tecleamos directamente el límite superior, en este caso 2. Tecleamos el 2 y aparece:



Confirmamos o corregimos y tecleamos EXE, cuando esté correcto, en este caso ya está, así que presionamos EXE y aparece:



La zona cuyo área hemos calculado se dibuja, y en la esquina inferior izquierda, aparece el valor de la integral, que es de 9.9 unidades cuadradas. Igual que por el método anterior que dio 99/100.

PRACTICAD ESTE MISMO EJERCICIO CON LA CALCULADORA DESDE EL PRINCIPIO, SIGUIENDO TODOS LOS PASOS PARA FAMILIARIZAROS CON SU UTILIZACIÓN.