DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD para hacer en casa - Soluciones

1
M00
P1#12

The probability distribution of a discrete random variable X is given by

$$P(X=x)=k\left(\frac{2}{3}\right)^x, \text{ for } x=0,1,2,\dots\dots$$

Find the value of k.

$P[X=x] = k\left(\frac{2}{3}\right)^x \quad , \quad x=0,1,2,\dots$

$\sum_{x=0}^{\infty} P[x=x]=1 \Longrightarrow 1=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x = k\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x = k\left(1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\dots\right)=$

$= k\cdot\frac{1}{1-2/3} = k\cdot\frac{1}{1/3} = 3k \Longrightarrow \boxed{k=\frac{1}{3}}$

2
M08 TZ2
P1#1

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta X viene dada por

$$P(X=x)=cx(5-x),\ x=1;\ 2;\ 3;\ 4.$$

(a) Halle el valor de c.

(b) Halle $E(X)$.

$P[X=x] = cx(5-x) \qquad x=1,2,3,4.$

a)

x	1	2	3	4
p	$4c$	$6c$	$6c$	$4c$

$\Longrightarrow 4c+6c+6c+4c=1 \ ; \ 20c=1 \Longrightarrow \boxed{c=\frac{1}{20}}$

b) $E[x] = \sum_{x=1}^{4} x\cdot P[x=x] = 1\cdot\frac{4}{20}+2\cdot\frac{6}{20}+3\cdot\frac{6}{20}+4\cdot\frac{4}{20} = \frac{50}{20} = \boxed{2'5}$

3
M10 TZ2
P2#2

Una variable aleatoria discreta X tiene la distribución de probabilidad dada en la siguiente tabla.

x	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
$P(X=x)$	0,15	0,21	p	q	0,13	0,07

(a) Si $E(X)=2,61$, determine el valor de p y de q.

(b) Calcule $Var(X)$, con una aproximación de tres cifras significativas.

a) $\sum P[x=x]=1 \longrightarrow 0'15+0'21+p+q+0'13+0'07=1$

$E[x]=\sum x\cdot P[x=x]=2'61 \longrightarrow 0'5\cdot 0'15+1'5\cdot 0'21+2'5p+3'5q+4'5\cdot 0'13+5'5\cdot 0'07=2'61 \rightarrow$

$\rightarrow p+q=0'44 \longrightarrow q=0'44-p$

$2'5p+3'5q=1'25 \longrightarrow 2'5p+3'5(0'44-p)=1'25 \Longrightarrow \boxed{p=0'29 \ ; \ q=0'15}$

b) $Var[x]=\sum x^2 P[x=x]-E^2[x] = 0'5^2\cdot 0'15+1'5^2\cdot 0'21+2'5^2\cdot 0'29+3'5^2\cdot 0'15+4'5^2\cdot 0'13+5'5^2\cdot 0'07-2'61^2=$

$= 2'0979 = \boxed{2'10}$

4
N08
P1#8

John le quita la etiqueta a tres latas de sopa de tomate y a dos latas de sopa de pollo para participar en un sorteo, y guarda las latas. En ese momento, se da cuenta de que las latas son idénticas, por lo que no es posible distinguir las latas de sopa de tomate de las de sopa de pollo. Unas semanas más tarde, decide almorzar sopa de pollo. Abre las latas al azar, hasta abrir una lata de sopa de pollo. Sea Y el número de latas que abre.

Halle

(a) los posibles valores de Y,

(b) la probabilidad de cada uno de estos valores de Y,

(c) el valor esperado de Y.

5 latas $\begin{cases} 3 \text{ de Tomate} \\ 2 \text{ de Pollo} \end{cases}$

Y = 'nº de latas que abre hasta encontrar una de pollo'

a) $Y = 1, 2, 3, 4$

b) $P[Y=1] = \frac{2}{5} = 0'4$

$P[Y=2] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = 0'3$

$P[Y=3] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{60} = 0'2$

$P[Y=4] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{12}{120} = 0'1$

c) $E[Y] = \sum_{j=1}^{4} j \cdot P[Y=j] = 1 \cdot 0'4 + 2 \cdot 0'3 + 3 \cdot 0'2 + 4 \cdot 0'1 = \boxed{2}$

5
N01
P1#1

A coin is biased so that when it is tossed the probability of obtaining heads is $\frac{2}{3}$. The coin is tossed 1800 times. Let X be the number of heads obtained. Find

(a) the mean of X;

(b) the standard deviation of X.

$B\left(1800 ; \frac{2}{3}\right)$

X = 'nº de caras obtenidas en 1800 tiradas'

a) $E[X] = n \cdot p = 1800 \cdot \frac{2}{3} = \boxed{1200}$

b) $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1800 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \boxed{20}$

6
M08 TZ2
P2#7

A lo largo de un período de un mes, Ava y Sven juegan un total de n partidos de tenis.

La probabilidad de que Ava gane un partido es igual a 0,4. El resultado de cada partido jugado es independiente de cualquier otro partido jugado.

Sea X el número de partidos que ha ganado Ava a lo largo de un período de un mes.

(a) Halle una expresión para $P(X=2)$ en función de n.

(b) Si la probabilidad de que Ava gane dos partidos es igual a 0,121 redondeando a tres cifras decimales, halle el valor de n.

$B(n\,;\,0'4)$

$X =$ 'nº de partidos ganados por Ava en n partidos'

a) $P[X=2] = \binom{n}{2}\cdot 0'4^2 \cdot 0'6^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}\cdot 0'16\cdot 0'6^{n-2} = 0'08\,n(n-1)\cdot 0'6^{n-2}$

b) $P[X=2] = 0'121 \Rightarrow 0'08\,n(n-1)\,0'6^{n-2} = 0'121 \Rightarrow \boxed{n=10}$ Se puede resolver con calculadora gráfica o probando valores de 'n'.

7
M04 TZ1
P1#12

Marian shoots ten arrows at a target. Each arrow has probability 0.4 of hitting the target, independently of all other arrows. Let X denote the number of these arrows hitting the target.

(a) Find the mean and standard deviation of X.

(b) Find $P(X \geq 2)$.

$B(10\,;\,0'4)$

a) $E[X] = np = 10\cdot 0'4 = \boxed{4}$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10\cdot 0'4\cdot 0'6} = \boxed{1'55}$

b) $P[X\geq 2] = 1-P[X<2] = 1-P[X=0]-P[X=1] = 1-0'6^{10}-10\cdot 0'4\cdot 0'6^{9} = \boxed{0'954}$

8
Muestra 06 P1#17
Muestra 08 P2#7

The random variable X has a Poisson distribution with mean 4. Calculate

(a) $P(3 \leq X \leq 5)$;

(b) $P(X \geq 3)$;

(c) $P(3 \leq X \leq 5 \mid X \geq 3)$.

$Poi(4)$

a) $P[3\leq X\leq 5] = P[X=3]+P[X=4]+P[X=5] = \frac{e^{-4}\cdot 4^3}{3!}+\frac{e^{-4}\cdot 4^4}{4!}+\frac{e^{-5}\cdot 4^5}{5!} = \boxed{0'547}$

b) $P[X\geq 3] = 1-P[X<3] = 1-P[X=0]-P[X=1]-P[X=2] = 1-\frac{e^{-4}\cdot 4^0}{0!}-\frac{e^{-4}\cdot 4^1}{1!}-e^{-4}\cdot\frac{4^2}{2!} = \boxed{0'762}$

c) $P[3\leq X\leq 5 / X\geq 3] = \frac{P[3\leq X\leq 5 \,\cap\, X\geq 3]}{P(X\geq 3)} = \frac{P[3\leq X\leq 5]}{P(X\geq 3)} = \frac{0'547}{0'762} = \boxed{0'718}$

9
N07
P2#3

On a particular road, serious accidents occur at an average rate of two per week and can be modelled using a Poisson distribution.

(a) (i) What is the probability of at least eight serious accidents occurring during a particular four-week period?

(ii) Assume that a year consists of thirteen periods of four weeks. Find the probability that in a particular year, there are more than nine four-week periods in which at least eight serious accidents occur.

(b) Given that the probability of at least one serious accident occurring in a period of n weeks is greater than 0.99, find the least possible value of n, $n \in \mathbb{Z}^+$.

Poi (2)

X = 'nº accidentes graves por semana'

a) 4 semanas → Poi(8)

X = 'nº accidentes en cuatro semanas'

$P[X \geq 8] = 1 - P[X<8] = 1 - P[X=0] - P[X=1] - P[X=2] \cdots - P[X=7] = \boxed{0'547}$

$B(13;\ 0'547)$

$P[X>9] = \sum_{r=10}^{13} \binom{13}{r} \cdot 0'547^r \cdot 0'453^{13-r} = \boxed{0'0894}$ Hecho con calculadora gráfica

b) n semanas → Poi(2n)

$P[X \geq 1] \geq 0'99$; $1 - P[X=0] \geq 0'99$; $P[X=0] \leq 0'01$; $\frac{e^{-2n}(2n)^0}{0!} \leq 0'01$; $e^{-2n} \leq 0'01$;

$-2n \leq \ln 0'01$; $-2n \leq -4'6$; $n \geq 2'3 \Rightarrow \boxed{n=3}$ semanas

10
M09 TZ1
P2#4

Mr Lee is planning to go fishing this weekend. Assuming that the number of fish caught per hour follows a Poisson distribution with mean 0.6, find

(a) the probability that he catches at least one fish in the first hour;

(b) the probability that he catches exactly three fish if he fishes for four hours;

(c) the number of **complete** hours that Mr Lee needs to fish so that the probability of catching more than two fish exceeds 80 %.

Poi(0'6)

X: 'nº peces capturados en una hora'

a) $P[X \geq 1] = 1 - P[X=0] = 1 - \frac{e^{-0'6} \cdot 0'6^0}{0!} = \boxed{0'451}$

b) 4 horas → Poi(2'4)

$P[X=3] = \frac{e^{-2'4} \cdot 2'4^3}{3!} = \boxed{0'209}$

c) m horas → Poi(0'6m)

$P[X>2] \geq 80\%$; $1 - P[X \leq 2] \geq 0'8$; $P[X \leq 2] \leq 0'2$; $P[X=0] + P[X=1] + P[X=2] \leq 0'2$

$$\frac{e^{-0'6m} \cdot (0'6m)^0}{0!} + \frac{e^{-0'6m} \cdot (0'6m)^1}{1!} + \frac{e^{-0'6m} \cdot (0'6m)^2}{2!} \leq 0'2$$

$e^{-0'6m} \cdot (1 + 0'6m + 0'18m^2) \leq 0'2$; $\boxed{m=8}$ horas (Resuelto con calculadora gráfica o probando valores de 'm'.)

11
M01
P1#13

Z is the standardised normal random variable with mean 0 and variance 1. Find the value of a such that $P(|Z| \le a) = 0.75$.

$N(0;\sqrt{1}) = N(0;1)$

$P[\,|Z| \le a\,] = 0'75 \rightarrow \boxed{a = 1'15}$ Hecho con calculadora gráfica

12
M02
P1#11

Los pesos de cierta especie de pájaro tienen distribución normal, con una media de 0,8 kg y una desviación típica de 0,12 kg. Halle la probabilidad de que el peso de un pájaro de la especie, elegido en forma aleatoria, esté entre 0,74 kg y 0,95 kg.

$N(0'8;\ 0'12)$

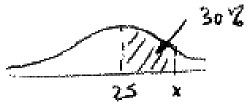
$P[0'74 < X < 0'95] = \boxed{0'5858}$ Hecho con calculadora gráfica en $N(0'8;\ 0'12)$

13
M04 TZ1
P1#12

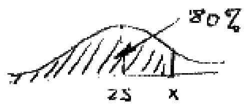
The weights of adult males of a type of dog may be assumed to be normally distributed with mean 25 kg and standard deviation 3 kg. Given that 30 % of the weights lie between 25 kg and x kg, where $x > 25$, find the value of x.

$N(25;\ 3)$

$P[25 < X < x] = 30\%$



$\Rightarrow$



$P[X < x] = 80\% \Rightarrow x = \boxed{27'52}$ kg. Hecho con calculadora gráfica en $N(25,3)$

14
N03
P2#5

Una variable aleatoria X está normalmente distribuida con media μ y desviación típica σ de modo que $\mathrm{P}(X > 50{,}32) = 0{,}119$ y $\mathrm{P}(X < 43{,}56) = 0{,}305$.

(a) Calcule μ y σ.

(b) A partir de lo anterior halle $\mathrm{P}(|X - \mu| < 5)$.

$N(\mu,\sigma)$

a) $P[X > 50'32] = 0'119 \longrightarrow P\left[Z > \frac{50'32-\mu}{\sigma}\right] = 0'119 \Rightarrow \frac{50'32-\mu}{\sigma} = 1'18$
$P[X < 43'56] = 0'305 \longrightarrow P\left[Z < \frac{43'56-\mu}{\sigma}\right] = 0'305 \Rightarrow \frac{43'56-\mu}{\sigma} = -0'51$
Hechos con calculadora gráfica en $N(0,1)$

$\left.\begin{array}{l} \mu + 1'18 \cdot \sigma = 50'32 \\ \mu - 0'51 \cdot \sigma = 43'56 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \mu = 45'6 \\ \sigma = 4 \end{array}}$ Resuelto con calculadora gráfica.

b) $P[\,|X - 45'6| < 5\,] = P[40'6 < X < 50'6] = \boxed{0'789}$

15
N08
P2#11

(a) Se considera que una caja de galletas tiene un peso insuficiente si pesa menos de 228 gramos. Se sabe que los pesos de estas cajas de galletas siguen una distribución normal, con una media de 231 gramos y una desviación típica de 1,5 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de que una caja tenga un peso insuficiente?

(b) El fabricante decide que la probabilidad de que una caja tenga un peso insuficiente debería reducirse hasta un valor de 0,002.

(i) Bill sugiere aumentar la media y no modificar la desviación típica. Halle el valor de la nueva media.

(ii) Sarah sugiere reducir la desviación típica y no modificar la media. Halle el valor de la nueva desviación típica.

(c) Después de haberse reducido a 0,002 la probabilidad de que una caja tenga un peso insuficiente, un grupo de clientes compra 100 cajas de galletas. Halle la probabilidad de que al menos dos de las cajas tengan un peso insuficiente.

$N(231;\ 1'5)$

a) $P(X<228) = \boxed{0'0228}$ Hecho con calculadora gráfica con $N(231;\ 1'5)$

b) $N(\mu;\ 1'5)$

$P[X<228] = 0'002$; $P\left[Z < \frac{228-\mu}{1'5}\right] = 0'002 \Rightarrow \frac{228-\mu}{1'5} = -2'88$ Hecho con calculadora gráfica con $N(0,1)$

$\mu = 228 - 1'5\cdot 2'88 = \boxed{232}$ g

$N(231;\ \sigma)$

$P[X<228] = 0'02$; $P\left[Z < \frac{228-231}{\sigma}\right] = 0'002 \Rightarrow \frac{-11}{\sigma} = -2'88$ Hecho con calculadora gráfica con $N(0,1)$

$\sigma = \frac{+11}{+2'88} = \boxed{1'04}$ g

c) $B(100;\ 0'002)$ X = 'nº de cajas con peso insuficiente'

$P[X\geq 2] = 1 - P[X=0] - P[X=1] = 1 - 100\cdot 0'098^{100} - \binom{100}{2} 0'002\cdot 0'098^{99} = \boxed{0'0174}$

16
N09
P2#6

Tim goes to a popular restaurant that does not take any reservations for tables. It has been determined that the waiting times for a table are normally distributed with a mean of 18 minutes and standard deviation of 4 minutes.

(a) Tim says he will leave if he is not seated at a table within 25 minutes of arriving at the restaurant. Find the probability that Tim will leave without being seated.

(b) Tim has been waiting for 15 minutes. Find the probability that he will be seated within the next five minutes.

$N(18;\ 4)$

a) $P[X>25] = \boxed{0'0401}$ Hechos con calculadora gráfica con $N(18;4)$ ambos apartados.

b) $P[X<20 / X>15] = \frac{P[X<20 \wedge X>15]}{P[X>15]} = \frac{P[15<X<20]}{P[X>15]} = \frac{0'4648}{0'7733} = \boxed{0'601}$

17
N02
P2#5

(a) La probabilidad $P(A)$ de que todos los materiales lleguen puntualmente a una obra en construcción es de 0,85. La probabilidad $P(B)$ de que el edificio se termine a tiempo es de 0,60. La probabilidad de que los materiales lleguen a tiempo y que el edificio se termine a tiempo es de 0,55.

(i) Muestre que los sucesos A y B **no** son independientes.

(ii) Todos los materiales llegan a tiempo. Halle la probabilidad de que el edificio no sea terminado a tiempo.

(b) Un equipo de diez personas estaba trabajando en el edificio, e incluía tres electricistas y dos plomeros. El arquitecto convocó a una reunión con cinco de las personas del equipo, y eligió al azar a las personas que debían asistir. Calcule la probabilidad de que sean llamados a la reunión **exactamente dos** electricistas y **un** plomero.

(c) El número de horas semanales que trabajan los integrantes del equipo tiene distribución normal, con una media de 42 horas. El 10 % del equipo trabaja 48 o más horas por semana. Halle la probabilidad de que **ambos** plomeros hayan trabajado más de 40 horas durante una semana determinada.

a) $P(A) = 0'85$, $P(B) = 0'60$ → $P(A)\cdot P(B) = 0'51$

$P(A\cap B) = 0'55$ → $0'51 \neq 0'55 \Rightarrow$ A, B no son independientes. ✓

	A	$\bar{A}$	
B	0'55	0'05	0'60
$\bar{B}$	0'30	0'10	0'40
	0'85	0'15	1

$$P(\bar{B}/A) = \frac{P(\bar{B}\cap A)}{P(A)} = \frac{0'30}{0'85} = \boxed{0'353}$$

b) 10 personas $\begin{cases} 3 \text{ Electricistas} \\ 2 \text{ Plomeros} \\ 5 \text{ otros} \end{cases}$

$$PR_5^{2,1,2} = \frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 2!}$$

Son permutaciones con repetición de 5 elementos, repitiéndose dos de ellos y otros dos de ellos.

$$P = \frac{5!}{2!\,1!\,2!}\cdot \underbrace{\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}}_{\text{electr.}}\cdot \underbrace{\frac{2}{8}}_{\text{plomero}}\cdot \underbrace{\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}}_{\text{otros}} = \boxed{0'238} = \frac{5}{21}$$

c) $N(42, \sigma)$

$P[X \geq 48] = 10\% \rightarrow P\left[Z \geq \frac{48-42}{\sigma}\right] = 0'1 \Rightarrow \frac{6}{\sigma} = 1'2816$ Hecho con calculadora gráfica con $N(0;1)$

$\sigma = \frac{6}{1'2816} = \boxed{4'682}$

$P[X > 40] = 0'6654$ Hecho con calculadora gráfica con $N(42; 4'682)$

$P(\text{ambos plomeros trabajen más de 40 h}) = 0'6654^2 = \boxed{0'443}$

18
M08 TZ2
P2#11

Las distancias recorridas por los alumnos para ir a clase al colegio Gauss siguen una distribución normal de media 6 km y con una desviación típica 1,5 km.

(a) (i) Halle la probabilidad de que la distancia recorrida hasta el colegio Gauss por un alumno elegido al azar esté comprendida entre 4,8 km y 7,5 km.

(ii) El 15 % de los alumnos recorre menos de *d* km para ir al colegio Gauss. Halle el valor de *d*.

En el colegio Euler, las distancias que recorridas los alumnos para ir a clase siguen una distribución normal de media μ km y con una desviación típica σ km.

(b) Si el 10 % de los alumnos recorre más de 8 km y el 5 % de los alumnos recorre menos de 2 km, halle el valor de μ y el de σ.

El número T de llamadas telefónicas recibidas por minuto en el colegio Euler sigue una distribución de Poisson de media 3,5.

(c) (i) Halle la probabilidad de que al menos tres llamadas telefónicas sean recibidas en el colegio Euler **en cada uno** de dos intervalos seguidos de un minuto.

(ii) Halle la probabilidad de que en el colegio Euler se reciban 15 llamadas telefónicas durante un intervalo de cinco minutos elegido al azar.

$N(6; 1'5)$

a) $P[4'8 < X < 7'5] = \boxed{0'629}$ Hechos con calculadora gráfica con $N(6; 1'5)$

$P[X < d] = 0'15 \Rightarrow \boxed{d = 4'45 \text{ km}}$

b) $N(\mu; \sigma)$

$P[X > 8] = 0'10$; $P\left[Z > \frac{8-\mu}{\sigma}\right] = 0'10 \Rightarrow \frac{8-\mu}{\sigma} = 1'282$

$P[X < 2] = 0'05$; $P\left[Z < \frac{2-\mu}{\sigma}\right] = 0'05 \Rightarrow \frac{2-\mu}{\sigma} = -1'645$

Hechos con calculadora gráfica con $N(0; 1)$

$\left.\begin{array}{l}\mu + 1'282 \cdot \sigma = 8 \\ \mu - 1'645 \cdot \sigma = 2\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\mu = 5'37 \\ \sigma = 2'05\end{array}}$ Resuelto con calculadora gráfica ó manualmente.

c) Poi (3'5)

X = 'nº llamadas por minuto'

$P[X \geq 3] = 1 - P[X=0] - P[X=1] - P[X=2] = 1 - \frac{e^{-3'5} \cdot 3'5^0}{0!} - \frac{e^{-3'5} \cdot 3'5^1}{1!} - \frac{e^{-3'5} \cdot 3'5^2}{2!} = 0'6792$

$P[X_1 \geq 3 \cap X_2 \geq 3] = 0'6792^2 = \boxed{0'461}$

d) 5 minutos → Poi (17'5)

X = 'nº llamadas durante 5 minutos'

$P[X = 15] = \frac{e^{-17'5} \cdot 17'5^{15}}{15!} = \boxed{0'0849}$