SEXTO EXAMEN DE 2º de Bachillerato CCSS - Miércoles 30 marzo de 2011

Nombre: .... Curso: 2º4

1. Deriva las siguientes funciones dejando su expresión en forma razonablemente simplificada:

   a) $f(x)=e^{\frac{x}{3}}+3\cos^2\left(\frac{x}{6}\right)$ b) $f(x)=\sqrt{x}\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

2. Aplica la definición para hallar la función derivada de $f(x)=3x^2-2x+1$

3. Sea la función: $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$

   a) Estudia el dominio y la continuidad de $f(x)$ indicando los tipos de discontinuidad que posea.

   b) Halla, explicando brevemente el procedimiento, los límites de $f(x)$ en los infinitos.

4. La siguiente función $f(x)$ representa las ganancias o pérdidas en millones de euros de una empresa fundada hace dos años: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-2 & \text{si} \quad -2\le x<-1\\ \dfrac{3x}{2x+4} & \text{si} \quad x\ge -1\end{cases}$ donde x indica el número de años transcurridos, considerando x = 0 como el momento actual.

   a) Estudia el dominio de la función $f(x)$

   b) Cuando pasen '*muchos años*', ¿en qué situación de ganancias o pérdidas se espera que esté la empresa?

5. Sea la función: $f(x)=\begin{cases}3x^2 & si \quad x<2\\ 3x+a & si \quad 2\le x\le 5\\ -x^2+13x+b & si \quad 5<x\end{cases}$

   a) Determina los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua en todos los valores de x

   b) Demuestra que la función no es derivable en x = 2. ¿Cómo interpretas esta circunstancia?

Criterios de calificación									
1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	5a	5b	Total
5p	5p	10p	5p	5p	5p	5p	5p	5p	50 p

1. a) $f'(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}} + 3 \cdot 2\cos\left(\frac{x}{6}\right)\cdot\left[-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{6}\right)\right]\cdot\frac{1}{6} = \boxed{\frac{e^{x/3}}{3} - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{6}\right)}$

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{1/x}\cdot\frac{-1}{x^2} = \frac{\ln(1/x)}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}\ln(1/x)}{2x} - \frac{\sqrt{x}}{x} =$

$= \boxed{\frac{\sqrt{x}}{2x}\cdot\left(\ln(1/x) - 2\right)}$

2. $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left[3(x+h)^2 - 2(x+h)+1\right] - \left[3x^2 - 2x+1\right]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{3x^2}+6xh+3h^2-\cancel{2x}-2h+\cancel{1}-\cancel{3x^2}+\cancel{2x}-\cancel{1}}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}(6x+3h-2) = \boxed{6x-2}$

3. $x^2+x-6=0$

$x = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$

a) $\operatorname{dom} f = \boxed{\mathbb{R} - \{-3,2\}}$ por ser una función racional.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-3,2\}$ por ser racional.

$\lim_{x\to -3} f(x) = \frac{-27-8}{0} = \frac{-35}{0} = \infty$ $\boxed{\text{Discont. Asintótica en } x=-3}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+3)} = \boxed{\frac{12}{5}}$ $\boxed{\text{Discontinuidad Evitable en } x=2}$

b) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3-8}{x^2+x-6} = \boxed{+\infty}$ $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3-8}{x^2+x-6} = \boxed{-\infty}$

4. a) $\frac{1}{2}x^2-2$ está definida en $[-2,-1)$

$\frac{3x}{2x+4}$ " " " $(-1,+\infty)$. En $x=-2$ se anula el denominador, pero no pertenece al 2º trozo de la función.

$\boxed{\operatorname{dom} f = [-2,+\infty)}$

b) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{3x}{2x+4} = \frac{3}{2} = \boxed{1'5}$

Cuando pasen 'muchos años' se espera que la empresa gane 1'5 millones de euros

5. Todas las expresiones son polinómicas, por lo que la función es continua en $(-\infty,2) \cup (2,5) \cup (5,+\infty)$

En $x=2$: $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 2^-} f(x) = 12 \\ f(2) = 6+a \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = 6+a\end{array}\right|$ $6+a=12 \to \boxed{a=6}$ Para que $f(x)$ sea continua en $x=2$.

En $x=5$: $\lim_{x\to 5^-} f(x) = 15+a$

$f(5) = 15+a$

$\lim_{x\to 5^+} f(x) = -25+65+b$

$15+a = 40+b$; $\boxed{b = a-25}$ Para que $f(x)$ sea continua en $x=5$

$a=6 \Rightarrow \boxed{b=-19}$

Para que sea continua en $\mathbb{R}$ deben ser: $\boxed{a=6}$ $\boxed{b=-19}$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } x<2 \\ 3 & \text{si } 2<x<5 \\ -2x+13 & \text{si } x>5 \end{cases}$$

$f'(2^-) = 12$

$f'(2^+) = 3$

Al ser la función continua en $x=2$, y tener distintos valores a izquierda y derecha de $x=2$, se trata de un punto anguloso: