

CONTINUIDAD Y LÍMITES DE FUNCIONES

1. En cada apartado, representa una función  $f(x)$  que cumpla:

a)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$f(x)$  es una función par

2. Califica cada una de las siguientes aseveraciones como **cierta** (explicando en qué concepto te basas) o **falsa** (poniendo un ejemplo que la contradiga)

a) Si  $f(2) = 3$  necesariamente se cumple que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

b) Si  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$  necesariamente se cumple que  $f(2) = 3$

c) Si una función está definida en todos los reales, necesariamente debe ser continua en cualquiera de sus puntos.

3. Estudia el dominio, las discontinuidades y esboza la gráfica de  $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{Si } x \leq -1 \\ 1-x^2 & \text{Si } -1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{x-3} & \text{Si } x > 2 \end{cases}$

4. Estudia el dominio, las discontinuidades y esboza la gráfica de  $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{Si } x \leq -1 \\ \frac{3x}{4x^2-1} & \text{Si } -1 < x < 0 \\ x^2-3x & \text{Si } x \geq 0 \end{cases}$ .

5. Estudia el dominio, las asíntotas de la función y representa gráficamente la función:  $f(x) = \frac{6-x^2-x}{x^2+3x}$

6. Halla: a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5-1}{x^7-1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{x^2+4x+4}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-\sqrt{x^2-3}}{x-2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x-3}{2x^2-5x-3}$

7. Estudia el dominio, las discontinuidades y esboza la gráfica de  $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x-4}$

8. Estudia el dominio, las asíntotas de la función y esboza la gráfica de  $f(x) = \frac{2}{1-e^x}$

9. ¿Para qué valores de  $a$  la función  $f(x) = \begin{cases} x+a & \text{Si } x \leq 1 \\ 3-ax^2 & \text{Si } x > 1 \end{cases}$  es continua en  $x=1$ ?

10. Dada la función:  $f(x) = \frac{ax^2+b}{x^3+2ax^2+bx+3}$  se pide:

a) Determinar  $a$  y  $b$  sabiendo que la función  $f(x)$  presenta una discontinuidad evitable en el punto  $x=1$

b) Definir una función  $g(x)$  que sea continua en  $x=1$  y que coincida con  $f(x)$  en el dominio de definición de ésta.

11. Obtener la expresión analítica de una función  $f(x)$  que en  $x=-3$  tenga una discontinuidad evitable, en  $x=1$  tenga una discontinuidad asíntótica con  $\lim_{x \rightarrow +1} f(x) = +\infty$  y además  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

12. Un comerciante vende determinado producto. Por cada unidad de producto cobra la cantidad de 5€. No obstante, si se le encargan mas de 10 unidades, decide disminuir el precio por unidad y cobra  $\sqrt{ax^2 + 500}$  € por  $x$  unidades. Por lo tanto el precio de compra de  $x$  unidades viene dado por la función:

$$c(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \leq 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

Se pide:

- El valor de  $a$  para que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.
  - Define la función  $U(x)$  'precio por unidad'
  - ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran "muchísimas" unidades?
13. La puntuación obtenida por un estudiante en un examen depende del tiempo ( $t$  expresado en horas) que haya dedicado a su preparación en los siguientes términos:

$$p(t) = \begin{cases} \frac{t}{3} & \text{Si } 0 \leq t \leq 15 \\ \frac{20t}{2t + 30} & \text{Si } t > 15 \end{cases}$$

- Comprueba que la función es continua
  - Demuestra que la función  $p(t)$  es creciente en todo su dominio. (*Sugerencia: divide  $20t$  entre  $2t + 30$* )
  - Comprueba que si un estudiante ha dedicado menos de 15 horas su puntuación será inferior a 5 puntos
  - Justifica que la puntuación nunca podrá ser superior a 10 puntos
14. En el diagrama se muestra la gráfica de una función  $f(x)$  para  $-2 < x < 8$ . Esboza la gráfica de  $1/f(x)$  rotulando las asíntotas y los puntos máximos o mínimos relativos:

