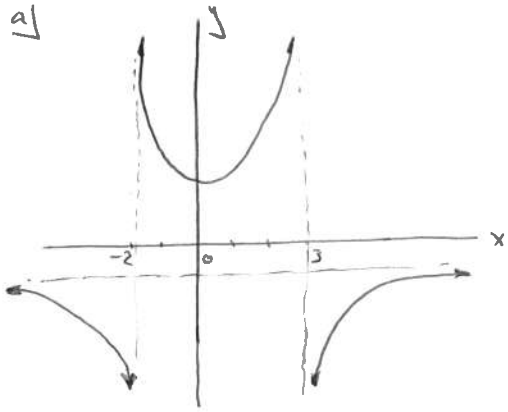
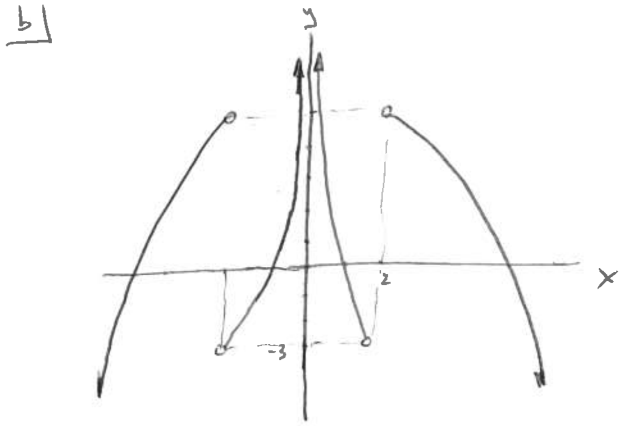
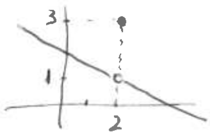
1) a)



b)

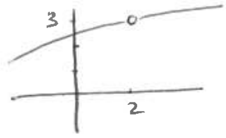


2) a) Falsa. Por ejemplo:



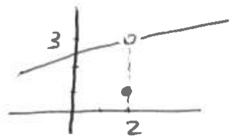
Sería $f(2)=3$, pero $\lim_{x\to 2} f(x) = 1 \neq 3$

b) Falsa. Por ejemplo:



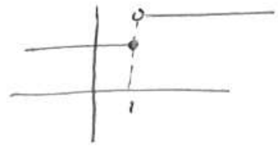
En que $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$, pero no existe $f(2)$

ó también:



En que $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$, pero $f(2) = 1 \neq 3$

c) Falsa. Podría tener discontinuidades:



Está definida en $\mathbb{R}$ pero no es continua en $x=1$

3) $x-3=0 \to x=3$ $\qquad \operatorname{dom} f = (-\infty,-1] \cup (-1,2] \cup (2,+\infty) - \{3\} = \boxed{\mathbb{R} - \{3\}}$

- $f(x)$ es continua en $(-\infty,-1) \cup (-1,2) \cup (2,+\infty) - \{3\}$ por tener expresiones polinómicas y racionales. No será continua en $x=3$, por anularse el denominador. Quedan por estudiar $x=-1$ y $x=2$.
- En $x=-1$:

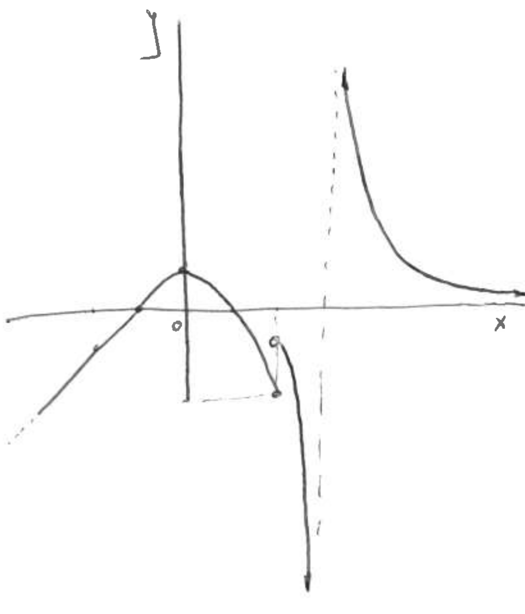
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} f(x) = -1+1 = 0 \\ f(-1) = -1+1 = 0 \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = 1-(-1)^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x=-1$$

- En $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = 1-2^2 = -3 \\ f(-2) = 1-2^2 = -3 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{1}{2-3} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ tiene una discontinuidad de \underline{salto finito} en } x=2$$

- En $x=3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{1}{3^- -3} = \frac{1}{-0} = -\infty \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{1}{3^+ -3} = \frac{1}{+0} = +\infty \end{array}\right\} f(x) \text{ tiene una discontinuidad de \underline{salto infinito} en } x=3$$



$\boxed{f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R} - \{3,2\}}$

Para esbozar la gráfica: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty + 1 = -\infty$; $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty - 3} = \frac{1}{+\infty} = 0$

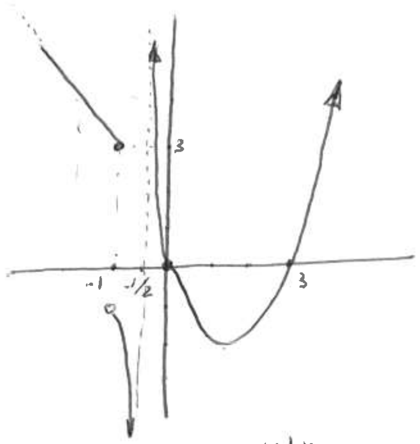
④ $4x^2-1=0$; $4x^2=1$; $x^2=\frac{1}{4}$; $x = \cancel{\tfrac{1}{2}}$ porque $\frac{1}{2} \notin (-1,2]$; $x = -\frac{1}{2}$

$\mathrm{dom} f = (-\infty,-1] \cup (-1,0) - \{-\tfrac{1}{2}\} \cup [0,+\infty) = \boxed{\mathbb{R} - \{-\tfrac{1}{2}\}}$

- $f(x)$ es continua en $(-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,+\infty) - \{-\tfrac{1}{2}\}$ por tener expresiones polinómicas y racionales. No es continua en $x=-\frac{1}{2}$ por anularse el denominador, queda por estudiar $x=-1$, $x=0$.

- En $x=-1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} f(x) = 2-(-1) = 3 \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{-3}{4-1} = \frac{-3}{3} = -1 \\ f(-1) = 2-(-1) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ $f(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x=-1$



- En $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{0}{-1} = 0 \\ f(0) = 0^2-3\cdot 0 = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^2-3\cdot 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ $f(x)$ es continua en $x=0$

x	y
0	0
1'5	-2'25
3	0

- $$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1/2^-} f(x) = \frac{-3/2}{+0} = -\infty \\ \lim_{x\to -1/2^+} f(x) = \frac{-3/2}{-0} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$ $f(x)$ tiene una discontinuidad de salto infinito en $x=-\frac{1}{2}$

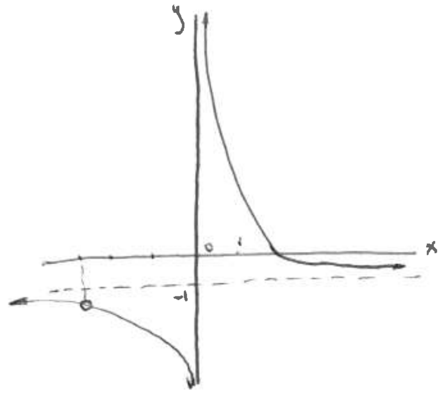
$\boxed{f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R}-\{-1,-\tfrac{1}{2}\}}$

Para esbozar la gráfica: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2-(-\infty) = +\infty$; $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

⑤ $f(x) = \dfrac{6-x^2-x}{x^2+3x}$

$x^2+3x=0$; $x = 0,\ -3$ $\boxed{\mathrm{dom} f = \mathbb{R} - \{0,-3\}}$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = -1 \rightarrow \boxed{\text{Asíntota Horizontal } y=-1}$



$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{6}{-0} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{6}{+0} = +\infty \end{array}\right| \rightarrow \boxed{\text{Asíntota Vertical } x=0}$$

$\lim_{x\to -3} f(x) = \frac{6-9+3}{9-9} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to -3} \frac{\cancel{(x+3)}(-x+2)}{x\cancel{(x+3)}} = \frac{5}{-3} \rightarrow$ Discontinuidad Evitable en $x=-3$

$$\begin{array}{r|rrr} & -1 & -1 & 6 \\ -3 & & +3 & -6 \\ \hline & -1 & 2 & \underline{|0} \end{array}$$

6) a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x^7-1} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x^4+x^3+x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)} = \boxed{\dfrac{5}{7}}$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

b) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2+4x+4} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to -2} \dfrac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{(x+2)}(x+2)} =$

$= \dfrac{12}{0} = \boxed{\infty}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -2 & & -2 & 4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 4 & 4 \\ -2 & & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

c) $\lim_{x\to 2} \dfrac{1-\sqrt{x^2-3}}{x-2} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(1-\sqrt{x^2-3})(1+\sqrt{x^2-3})}{(x-2)(1+\sqrt{x^2-3})} =$

$= \lim_{x\to 2} \dfrac{1-(x^2-3)}{(x-2)(1+\sqrt{x^2-3})} = \lim_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{(x-2)(1+\sqrt{x^2-3})} =$

$= \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(-x-2)}{\cancel{(x-2)}(1+\sqrt{x^2-3})} = \dfrac{-4}{2} = \boxed{-2}$

$$\begin{array}{r|rrr} & -1 & 0 & 4 \\ 2 & & -2 & -4 \\ \hline & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

d) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{2x^2-5x-3} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to 3} \dfrac{\cancel{(x-3)}(x+1)}{\cancel{(x-3)}(2x+1)} = \boxed{\dfrac{4}{7}}$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -2 & -3 \\ 3 & & 3 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 2 & -5 & -3 \\ 3 & & 6 & 3 \\ \hline & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

7) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3x-4}$

$x^2+3x-4=0 \;;\; x = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$ $\boxed{\text{dom} f = \mathbb{R} - \{1, -4\}}$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-1)}(x+4)} = \dfrac{0}{5} = 0 \to$ $\boxed{\text{Discontinuidad Evitable en } x=1}$

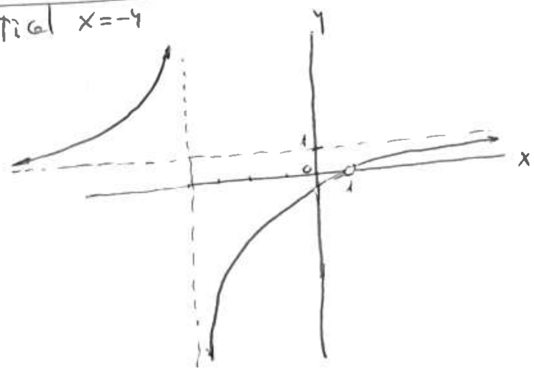
$\lim_{x\to -4^-} f(x) = \dfrac{16+8+1}{16-12-4} = \dfrac{25}{+0} = +\infty$

$\lim_{x\to -4^+} f(x) = \dfrac{25}{-0} = -\infty$

$\to$ $\boxed{\text{Discontinuidad de Salto Infinito en } x=-4}$

Asíntota Vertical $x=-4$

$\lim_{x\to \infty} f(x) = 1 \to$ Asíntota Horizontal $y=1$



8) $f(x) = \dfrac{2}{1-e^x}$

$1-e^x=0 \;;\; e^x=1 \;;\; x=0 \to$ $\boxed{\text{dom} f = \mathbb{R} - \{0\}}$

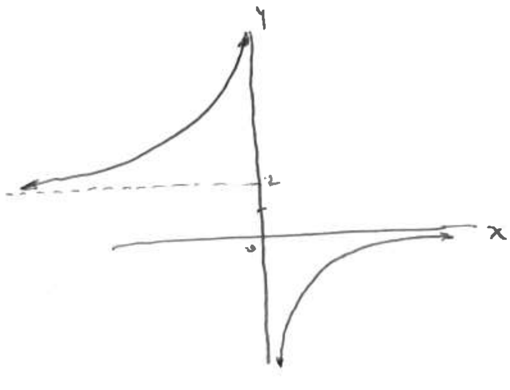
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{2}{1-e^0} = \dfrac{2}{+0} = +\infty$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{2}{1-e^0} = \dfrac{2}{-0} = -\infty$

Asíntota Vertical $x=0$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \dfrac{2}{1-e^{-\infty}} = \dfrac{2}{1-0} = 2 \to$ Asíntota Horizontal $y=2$ cuando $x\to-\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \dfrac{2}{1-e^{+\infty}} = \dfrac{2}{-\infty} = 0 \to$ Asíntota Horizontal $y=0$ cuando $x\to+\infty$



(13) a)

• Las expresiones son polinómica y racional, por lo tanto definidas y continuas salvo que se anule el denominador:

$2t+30=0 \to t=-\cancel{15}$ porque $-15 \not> 10$

• Sólo que estudiar $t=15$:

$\lim_{t\to 15^-} P(t) = \frac{15}{3} = 5$

$P(15) = \frac{15}{3} = 5$

$\lim_{t\to 15^+} P(t) = \frac{20\cdot 15}{2\cdot 15+30} = \frac{300}{60} = 5$

$\Rightarrow$ $P(t)$ también es continua en $t=15$.

b) $\frac{t}{3}$ es creciente por tratarse de una recta con pendiente positiva: $\frac{1}{3}$

$\frac{20t}{2t+30} = 10 - \frac{300}{2t+30}$

$$\begin{array}{r|l} 20t & 2t+30 \\ \cline{2-2} -20t-300 & 10 \\ \hline -300 & \end{array}$$

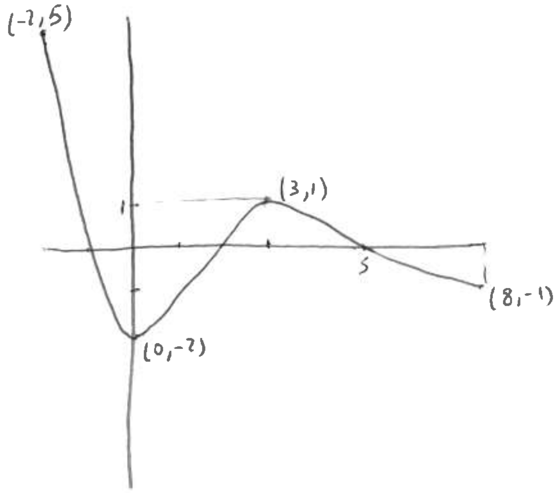
$10 - \frac{300}{2t+30}$ va creciendo conforme aumenta t, ya que es sustraendo se hace cada vez más pequeño, aumenta el valor de la resta.

c) Al ser $P(t)$ creciente y continua, como $P(15)=5$, para $t<15 \Rightarrow P(t)<5$.

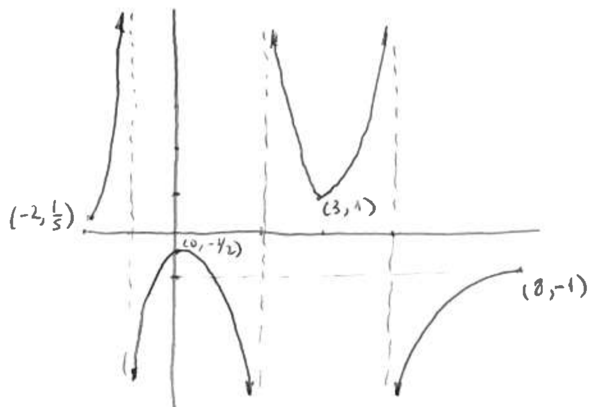
d) Al ser $P(t)$ creciente y continua, su mayor valor lo alcanzaría con valores infinitos de t:

$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{20t}{2t+30} = \frac{20}{2} = \boxed{10}$ Puntuación a la que tendería con ¡infinitas horas! de estudio.

(14)



x	f
-2	5
-1	0
0	-2
2	0
3	1
5	0
8	-1



x	1/f
-2	1/5
-1	~~X~~
0	-1/2
2	~~X~~
3	1
5	~~X~~
8	-1