Resolución de Triángulos - Soluciones

1. En los escaparates de las relojerías suelen mostrar los relojes con sus agujas situadas simétricas marcando aproximadamente las 10h 10min. ¿Cuál es exactamente la hora?

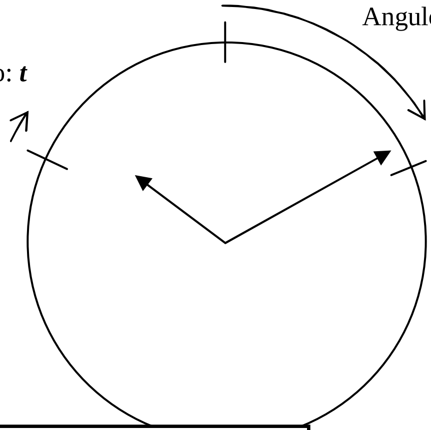
Las velocidades angulares de las agujas son:

Aguja Horaria = $30\,{}^{\text{o}}\!/\!_h$

Aguja Minutera = $360\,{}^{\text{o}}\!/\!_h$

Aguja Horaria
Tiempo transcurrido: ***t***
Angulo girado: ***a***

Aguja Minutera
Tiempo transcurrido: ***t***
Angulo girado: 60 - ***a***



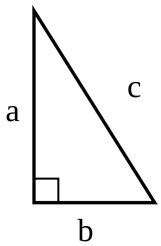
A partir de las diez en punto, y en un mismo tiempo ***t***:

$$\left.\begin{array}{l} 30 = \dfrac{a}{t} \rightarrow a = 30t \\ 360 = \dfrac{60-a}{t} \end{array}\right\} \Rightarrow 360t = 60 - 30t$$

$$390t = 60 \Rightarrow t = \frac{60}{390} = \frac{2}{13}h = 9\,\text{min}\,13seg$$

Son las 10h 9min 13seg

2. Utiliza una hoja de cálculo para estudiar posibles valores de perímetro de un triángulo rectángulo con 18 cm^2 de área. ¿Cuál es su valor mínimo? ¿Y el máximo?

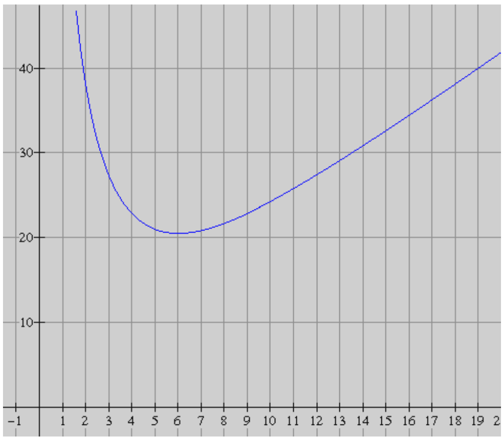


El área del triángulo se calcula mediante: $\dfrac{a.b}{2}$.

Por lo que en este caso $\dfrac{a.b}{2} = 18$ luego: $b = \dfrac{36}{a}$.

El perímetro será:

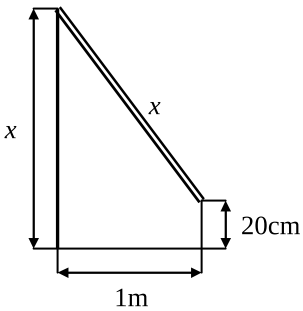
$$P = a + \frac{36}{a} + \sqrt{a^2 + \left(\frac{36}{a}\right)^2} = \frac{a^2 + 36 + \sqrt{a^4 + 1296}}{a}$$



La función es la representada gráficamente a la derecha.
En ella se observa que el perímetro crecería indefinidamente tanto para valores de *a* cercanos a cero como para valores inmensos de *a*. Por ello el perímetro de este triángulo no tendría valor máximo, pero sí valor mínimo para *a* = *b* = 6 al que le corresponde el valor:

Perímetro mínimo = $12 + \sqrt{72} \approx 20{,}49$ cm.

3. Pedro quiere subir hasta el borde de una tapia, para ello ha cogido una escalera, pero no le sirve pues tiene la misma altura que la tapia. Como es muy ingenioso ha cogido un cajón de 20cm de alto y lo ha colocado a 1m de distancia del pie de la tapia. Si al poner sobre el cajón la escalera está llega hasta el borde de la tapia, ¿qué altura tiene ésta?

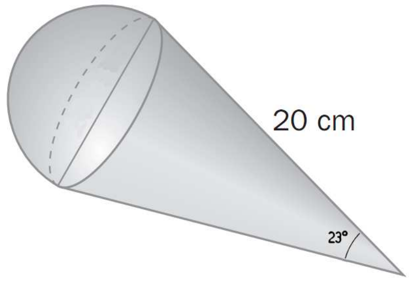


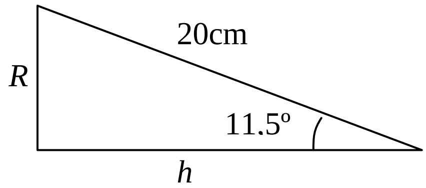
Se puede hallar la altura de la tapia mediante el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 1^2 + (x-0{,}2)^2;\, x^2 = 1 + x^2 + 0{,}04 - \frac{4x}{10};$$

$$10x^2 = 10 + 10x^2 + 0{,}4 - 4x; 4x = 10{,}4 \Rightarrow x = 2{,}6m$$

4. El cuerpo del dibujo, que recuerda a un helado de cucurucho, está formado por una semiesfera situada sobre un cono. Halla el volumen y la superficie total de dicho cuerpo.





$$sen 11,5º = \frac{R}{20} \rightarrow R = 20 \cdot sen 11,5º = 3,99$$

$$\cos 11,5º = \frac{h}{20} \rightarrow h = 20 \cdot \cos 11,5º = 19,60$$

Volumen Cono = $\frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 3,99^2 \cdot 19,60}{3} = 326,30$ cm³

Volumen Semi-Esfera = $\frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 3,99^3 = 132,77$ cm³

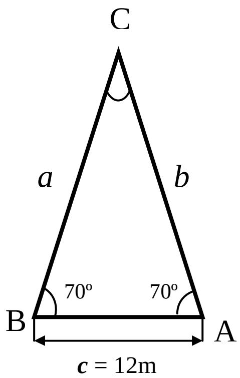
Superficie Cónica = $\pi R g = \pi \cdot 3,99 \cdot 20 = 250,53$ cm²

Superficie Semi-Esfera = $2\pi R^2 = 2\pi \cdot 3,99^2 = 99,90$ cm²

Volumen Total = 326,30 + 132,77 = 459,08 cm³

Superficie Total = 250,53 + 99,90 = 350,43 cm²

5. En un triángulo isósceles el lado menor mide 12m. Resuélvelo sabiendo que hay dos ángulos de 70º.



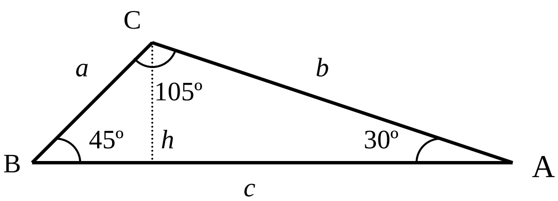
El ángulo C lo hallamos fácilmente sumando los dos de 70º y restándoselos a 180º. En cuanto a los lados a y b los hallamos de la misma forma que en el triángulo anterior:

$$\cos 70º = \frac{6}{b}; b = \frac{6}{\cos 70º}; b \approx 17,54m$$

como $a = b$; $a = 17,54$ m

A = 70º	a =17,54 m
B = 70º	b =17,54 m
C = 40º	c =12 m

6. Halla los lados de un triángulo sabiendo que su área mide 18 cm^2 y dos de sus ángulos A = 30º y B = 45º.



En primer lugar montamos un sistema de ecuaciones relacionando el seno de A y el área del triángulo:

$$\left.\begin{array}{l} Area = \frac{c.h}{2} \\ \text{sen } A = \frac{h}{b} \end{array}\right\} \Rightarrow Area = \frac{c \cdot b \cdot \text{sen } A}{2}$$

Si $\frac{c.b.sinA}{2} = 18$; $c \cdot b = \frac{18 \cdot 2}{sin 30º}; c \cdot b = 72; c = \frac{72}{b}$

Sustituyendo c en el teorema de los senos obtenemos:

$$\frac{\frac{72}{b}}{sin 105º} = \frac{b}{sin 45º}; b^2 = \frac{72.sin 45º}{sin 105º}; b = \sqrt{\frac{72.sin 45º}{sin 105º}}; b = 7,26cm$$

$$c = \frac{72}{7,26cm}; c = 9,92; \frac{9,92}{sin 105º} = \frac{a}{sin 30º}; a = 5,13cm$$

A = 30º	a =5,1m
B = 45º	b =7,2m
C = 105º	c =9,9m

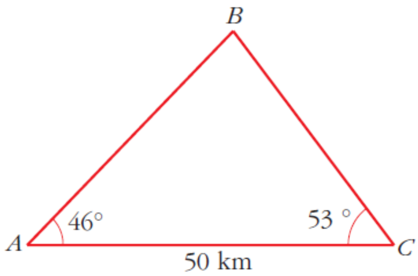
7. Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos: BAC = 46º y BCA = 53º. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?

$\hat{B} = 180 - 46 - 53 = 81°$

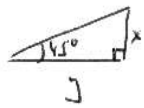
$\dfrac{a}{\text{sen}\,46°} = \dfrac{50}{\text{sen}\,81°} = \dfrac{c}{\text{sen}\,53°}$

$a = \dfrac{50\,\text{sen}\,46°}{\text{sen}\,81°} = \boxed{36{,}415 \text{ Km}}$

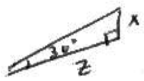
$c = \dfrac{50\,\text{sen}\,53°}{\text{sen}\,81°} = \boxed{40{,}430 \text{ Km}}$



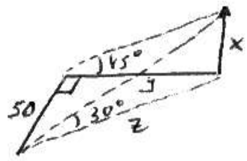
8. Un hombre que está situado al oeste de una emisora de radio observa que su ángulo de elevación es de 45º. Camina 50 m hacia el sur y observa que el ángulo de elevación es ahora de 30º. Halla la altura de la antena.

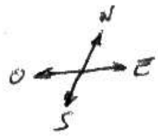


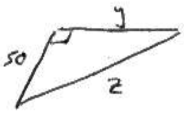
$\rightarrow \text{Tg}\,45° = \dfrac{x}{y} \Rightarrow y = x$



$\rightarrow \text{Tg}\,30° = \dfrac{x}{z} \Rightarrow z = x\sqrt{3}$







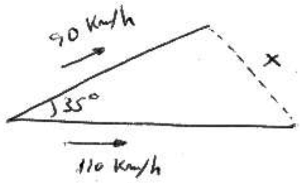
$\rightarrow z^2 = 50^2 + y^2 \;;\; 3x^2 = 2500 + x^2 \;;\; 2x^2 = 2500 \Rightarrow x = \dfrac{50}{\sqrt{2}} = \boxed{25\sqrt{2} \text{ m}}$

9. Salen desde un mismo punto dos coches con trayectorias rectas que forman un ángulo de 35º. El primer coche va a 110 Km/h y el segundo a 90 Km/h. ¿Qué distancia les separa al cabo de 7 minutos?

$t = 7 \text{ min}$

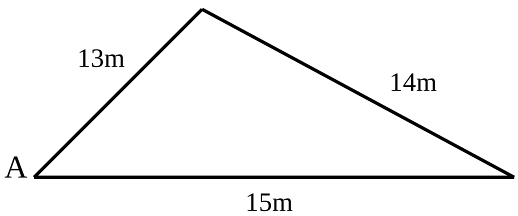
$110 \dfrac{\text{Km}}{\text{h}} \cdot 7 \text{ min} \cdot \dfrac{1\text{h}}{60 \text{ min}} = 12'8\widehat{3} \text{ Km}$

$90 \dfrac{\text{Km}}{\text{h}} \cdot 7 \text{ min} \cdot \dfrac{1\text{h}}{60 \text{ min}} = 10'5 \text{ Km}$



$x = \sqrt{12'8\widehat{3}^2 + 10'5^2 - 2 \cdot 12'8\widehat{3} \cdot 10'5 \cdot \cos 35°} = \boxed{7'361 \text{ Km}}$

10. Halla el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos lados miden 13m, 14m y 15m.



Lo único que necesitamos es hallar el seno de un ángulo.

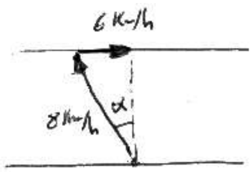
$\cos A = \dfrac{13^2 + 15^2 - 14^2}{2.13.15}$; $\cos A = 0{,}51$; $A = 59{,}49º$

$\dfrac{14}{\sin 59{,}49} = 2r \Rightarrow r = 8{,}125m$

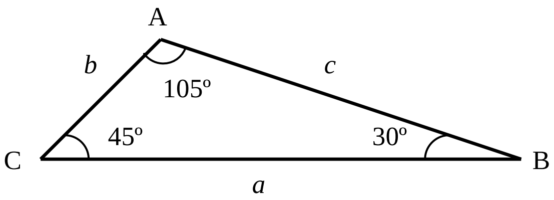
11. Una barca puede navegar en agua tranquila a la velocidad de 8 Km/h. Si la corriente del río lleva una velocidad de 6 Km/h ¿bajo qué ángulo cortará la barca a la corriente para que la dirección de su movimiento sea perpendicular a la corriente? ¿Cuál es la velocidad real de la barca?

$\text{Sen}\,\alpha = \dfrac{6}{8} \Rightarrow \boxed{\alpha = 48{,}59°}$

$v = \sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{28} = \boxed{5'292 \text{ Km/h}}$



12. Halla el área del triángulo ABC sabiendo que a = 1m, B =30º y C = 45º.



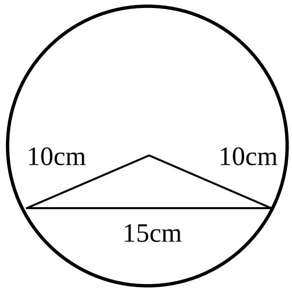
Para saber el área debemos calcular la altura que va desde A perpendicularmente al lado '*a*':

$$\frac{1}{\sin 105^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ}; \quad c = 0{,}73\,m;$$

$$senB = \frac{h}{0{,}73} \Rightarrow h = 0{,}73 \cdot sen30^\circ = 0{,}366\,m$$

$$S_{.Triángulo} = \frac{a.h}{2} = \frac{1 \cdot 0{,}366}{2} \approx 0{,}183\,m^2$$

13. En una circunferencia de 10cm de radio se unen dos puntos con una cuerda de 15cm. ¿Cuánto vale el ángulo central?

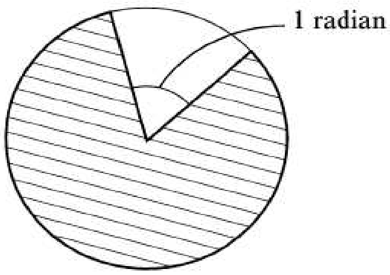


Aplicando el teorema del coseno:

$$\cos\alpha = \frac{10^2 + 10^2 - 15^2}{2.10.10} \Rightarrow \cos\alpha = -0'125 \Rightarrow \alpha \approx 97^\circ$$

$$\boxed{\text{Ángulo central} = 97^\circ}$$

14. El diagrama muestra un círculo de 5 cm de radio. Halle el perímetro y el área de la región sombreada.



2π —— $2\pi \cdot 5$

1 —— Arco $\Rightarrow$ Arco $= \frac{10\pi}{2\pi} = 5$ cm

Perímetro $= 2\pi \cdot 5 - 5 + 5 + 5 = \boxed{10\pi + 5} = \boxed{36'416 \text{ cm}}$

2π —— $\pi \cdot 5^2$

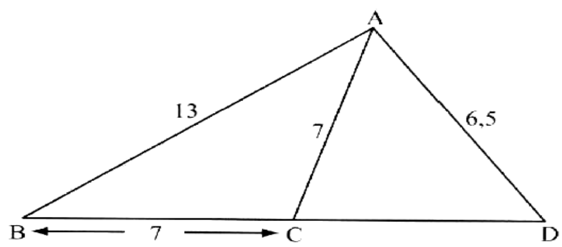
1 —— sector $\Rightarrow$ Area sector $= \frac{25\pi}{2\pi} = 12'5 \text{ cm}^2$

Area $= \boxed{25\pi - 12'5} = \boxed{66'040 \text{ cm}^2}$

15. La siguiente figura muestra un triángulo acutángulo ABD, donde AB = 13 cm y AD = 6,5 cm. Sea C un punto perteneciente a la recta BD, tal que BC = AC = 7 cm.

a) Halle la medida del ángulo ACB

b) Halle la medida del ángulo CAD



a)

$$\cos A\hat{C}B = \frac{7^2 + 7^2 - 13^2}{2 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{-71}{98}$$

$$A\hat{C}B = \boxed{136{,}4264^\circ}$$

b)

$$A\hat{C}D = 180 - A\hat{C}B = 43{,}5736^\circ$$

$$\frac{7}{sen\,\hat{D}} = \frac{6'5}{sen\,A\hat{C}D} \Rightarrow sen\,\hat{D} = \frac{7\,sen\,A\hat{C}D}{6'5} = 0'7423 \Rightarrow \hat{D} = \begin{cases} \boxed{47'9284^\circ} \\ \cancel{132'0716^\circ} \end{cases}$$

No es solución porque el ángulo $\hat{D}$ del dibujo es agudo

$$C\hat{A}D = 180 - A\hat{C}D - \hat{D} = \begin{cases} \boxed{88'4980^\circ} \\ \cancel{4'3548^\circ} \end{cases}$$

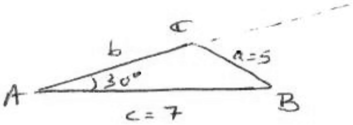
16. En el triángulo *ABC*, A=30º, a = 5 y c = 7. Halle la diferencia entre las áreas de los dos triángulos ABC que se pueden construir con los datos proporcionados.

$$5^2 = b^2 + 7^2 - 2\cdot b\cdot 7\cos 30^\circ$$

$$25 = b^2 + 49 - 7\sqrt{3}\,b$$

$$0 = b^2 - 7\sqrt{3}\,b + 24$$

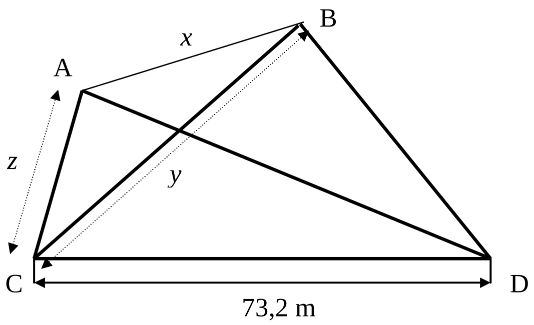
$$b = \frac{7\sqrt{3} \pm \sqrt{147-96}}{2} = \frac{7\sqrt{3}\pm\sqrt{51}}{2} \quad \begin{cases} 4'6329 \\ 2'4915 \end{cases}$$



$$\text{Area} = \frac{b\cdot c\cdot \sin A}{2}$$

$$\text{Area}_1 - \text{Area}_2 = \underbrace{\frac{\frac{7\sqrt{3}+\sqrt{51}}{2}\cdot 7\sin 30^\circ}{2}}_{16'8576} - \underbrace{\frac{\frac{7\sqrt{3}-\sqrt{51}}{2}\cdot 7\sin 30^\circ}{2}}_{4'3601} = \frac{7\sqrt{51}\cdot\sin 30^\circ}{2} = \frac{7\sqrt{51}}{4} = \boxed{12'4975}$$

17. Sean A y B dos puntos inaccesibles, pero visibles ambos desde otros puntos accesibles C y D, separados por la longitud 73,2m. Suponiendo que los ángulos ACD = 80º 12'; BCD = 43º 31'; BDC =32º y ADC = 23º 14', determina la distancia AB.



Debido a que podemos conocer todos los ángulos que se producen en los diferentes cruces de los dos triángulos nos basta hallar los lados z, *y* para poder hallar la distancia AB.

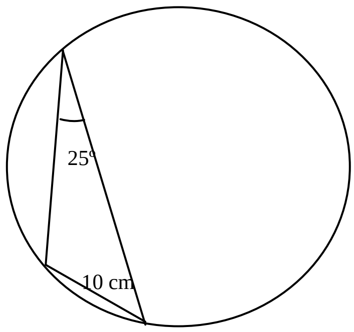
$$\frac{73{,}2}{sen76º34'} = \frac{z}{sen23º14'} \Rightarrow z = \frac{73{,}2\cdot sen23º14'}{sen76º34'} = 29{,}69$$

$$\frac{73{,}2}{sen104º29'} = \frac{y}{sen32º} \Rightarrow z = \frac{73{,}2\cdot sen32º}{sen104º29'} = 40{,}06$$

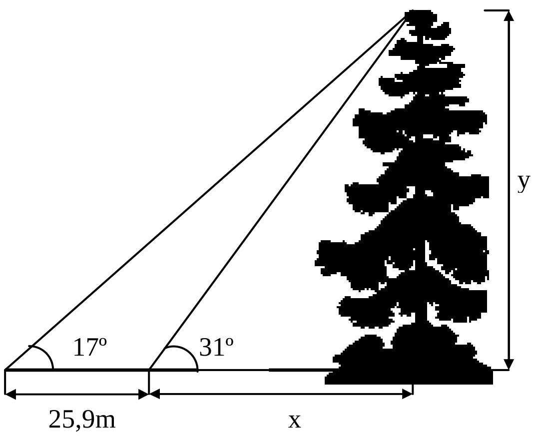
$$x = \sqrt{z^2 + y^2 - 2zy\cdot\cos 36º41'} = 24{,}06m$$

18. El triángulo de la figura está inscrito en un círculo, halla su radio.

$$\frac{10}{\sin 25} = 2R \Rightarrow R = \frac{5}{\sin 25^\circ} = \boxed{11'8310 \text{ cm}}$$



19. Se desea saber la altura de un árbol situado en la orilla opuesta de un río. La visual del extremo superior del árbol desde un cierto punto forma un ángulo de elevación de 17º. Aproximadamente a 25,9m hacia la orilla en dirección al árbol, el ángulo es de 31º. Calcula la altura del árbol.



Para hallar la altura del árbol necesitamos un sistema de ecuaciones:

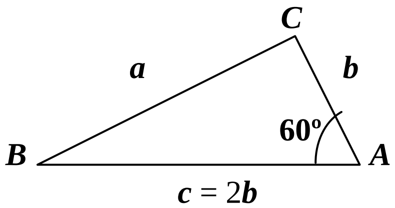
$$\text{tg}\,31º = \frac{y}{x} \qquad \text{tg}\,17º = \frac{y}{x+25{,}9} \qquad \begin{cases} y = \text{tg}\,31º.x \\ \text{tg}\,17º = \dfrac{\text{tg}\,31º.x}{x+25{,}9} \end{cases}$$

$$x\,\text{tg}\,17º + \text{tg}\,17º.25{,}9 = x\,\text{tg}\,31º$$

$$x = \frac{\text{tg}\,17º.25{,}9}{\text{tg}\,31º - \text{tg}\,17º};\ x \approx 26{,}83m$$

$$\text{tg}\,31º = \frac{y}{26{,}83};\ y = \text{tg}\,31º\cdot 26{,}83 \Rightarrow y = \mathbf{16{,}12m}$$

20. Uno de los lados de un triángulo es doble del otro y el ángulo comprendido mide 60º. Halla los otros dos ángulos.



Aplicando el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + (2b)^2 - 2b(2b)\cos 60 = 3b^2 \Rightarrow a = b\sqrt{3}$$

Aplicando ahora el teorema de los senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \Rightarrow \operatorname{sen} C = \frac{c \operatorname{sen} 60^\circ}{a} = \frac{2b\sqrt{3}/2}{b\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow C = 90^\circ \rightarrow B = 30^\circ$$

Se trata de un triángulo rectángulo.

21. La siguiente figura muestra un círculo de centro O y radio 12 cm. La cuerda AB determina un ángulo central de 75º. Las tangentes a la circunferencia en A y en B se encuentran en P.

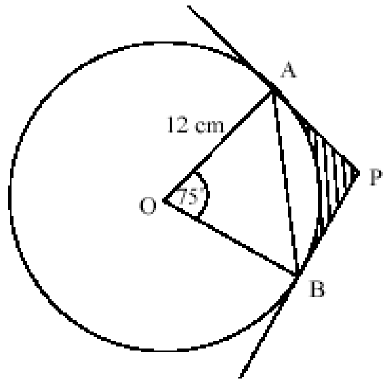
a) Halla el área del sector OAB

b) Halla el área del triángulo OAB

c) Demuestra que $AB = 12\sqrt{2(1-\cos 75^\circ)}$

d) Halla el área del triángulo ABP

e) Halla el área de la región sombreada

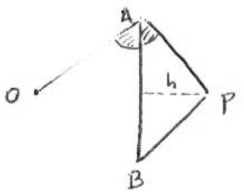


a) 360° —— $\pi \cdot 12^2$
75° —— Sector OAB $\Rightarrow$ Area Sector OAB $= \frac{75 \cdot \pi \cdot 144}{360} = \boxed{30\pi \text{ cm}^2} = 94'2478 \text{ cm}^2$

b) Area $\overset{\triangle}{OAB} = \frac{12 \cdot 12 \cdot \operatorname{sen} 75^\circ}{2} = \boxed{69'5467 \text{ cm}^2}$

c) $AB = \sqrt{12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cos 75^\circ} = \sqrt{144(1+1-2\cos 75^\circ)} = 12\sqrt{2(1-\cos 75^\circ)}$ ✓

d) $180 - 75 = 105^\circ \longrightarrow O\hat{A}B = \frac{105}{2} = 52{,}5^\circ \Rightarrow B\hat{A}P = 90 - 52{,}5 = 37{,}5^\circ$



$\operatorname{Tg} B\hat{A}P = \frac{h}{AB/2} = \frac{h}{6\sqrt{2(1-\cos 75^\circ)}} \Rightarrow h = 6\sqrt{2(1-\cos 75^\circ)} \cdot \operatorname{Tg} 37{,}5^\circ$

Area $\overset{\triangle}{ABP} = \frac{\overline{AB} \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot \sqrt{2(1-\cos 75^\circ)} \cdot 6\sqrt{2(1-\cos 75^\circ)} \cdot \operatorname{Tg} 37{,}5^\circ}{2} =$

$= 36 \cdot 2(1-\cos 75^\circ) \operatorname{Tg} 37{,}5^\circ = \boxed{72(1-\cos 75^\circ) \operatorname{Tg} 37{,}5^\circ} = 40{,}9484$

e) Area = Area $\overset{\triangle}{ABP}$ − Area Segmento AB =

= Area $\overset{\triangle}{ABP}$ − (Area Sector OAB − Area $\overset{\triangle}{OAB}$) =

$= 72(1-\cos 75^\circ) \operatorname{Tg} 37{,}5^\circ - 30\pi + 72 \operatorname{sen} 75^\circ = \boxed{16{,}2473 \text{ cm}^2}$