Ejercicios de números complejos

1 Dado el nº complejo $z=\sqrt{3}+i$, escribe su opuesto, su conjugado, su inverso y el inverso de su conjugado.

2 a) Calcula $i^{123}, i^{100}, i^{-33}$

b) Calcula la suma $1+i+i^2+i^3+...........+i^{44}$

3 Calcula x para que el producto $(2x - 3i)(4 + i)$ sea un número imaginario puro

4 Sea $P(z)=z^3+az^2+bz+c$ un polinomio de variable compleja z con $a,b,c\in\Re$. Dos de sus raíces son -2 y -3 + 2i. Halle el valor de a, b y c.

5 Calcula el nº complejo cuyo cubo es un nº real, sabiendo que la componente real es superior en una unidad a la componente imaginaria.

6 ¿Es cierto que $\mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\cdot \mathrm{Re}(z_2)$? De no serlo, busca una fórmula alternativa.

7 Resuelve en el conjunto de los números complejos: $9x^2+12x+13=0$ comprobando una de sus soluciones.

8 Poniendo primero $z^2 = w$, o de otra manera, halla los valores de z para los que $4z^4+2z^2-2=0$ dando las respuestas en forma cartesiana con los valores redondeados con tres decimales.

9 Encuentra las cuatro raíces del polinomio: $4z^4+8z^3+z^2-3z-10$

10 Sabiendo que $|z|=2\sqrt{5}$, halle el número complejo z que satisface la ecuación: $\frac{25}{z}-\frac{15}{z^*}=1-8i$

11 Halla la ecuación que deben satisfacer las componentes de z, si: $|z|^2+3\mathrm{Re}(z^2)=4$ y represéntala mediante un programa informático adecuado.

12 Halla los valores de n tales que $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ es un número real.

13 Dados los números complejos $z=3_{130^\circ}$ y $w=2_{312^\circ}$ escribe tanto en forma cartesiana como en polar:

a) z^5 b) $z+w$ c) $z\cdot w$ d) $\frac{z}{w}$

14 Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean los números complejos $3\pm 2i$

15 a) Halle las tres raíces de la ecuación $8z^3+27=0$ dando las soluciones en forma cartesiana.
b) Si estas tres raíces representan los vértices de un triángulo en un diagrama de Argand, demuestre que su área es igual a $\frac{27\sqrt{3}}{16}$.

16 Resuelve: $z^4+256=0$ dando las soluciones en forma módulo-argumental.

17 Se sabe que –3 – 4i es una de las raíces quintas de un número complejo z. Halla z y las restantes raíces escritas en forma polar.

18 Dados $z_1=r\,cis\,\pi/3$ y $z_2=i-1$, halle el valor de r si $\left|z_1\cdot z_2{}^4\right|=12$

19 Halla las cinco soluciones de $\sqrt[5]{-i}$ escritas en la forma $r\cdot cis\theta$

20 Halla los números complejos z_1 y z_2 solución del sistema $\begin{cases} 2z_1-iz_2=1 \\ z_1-z_2=1-2i \end{cases}$

21 Sea $u = 1 + i\sqrt{3}$ y $v = 1 + i$, donde $i^2 = -1$

a) Compruebe que $\dfrac{u}{v} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$

b) Expresando tanto u como v en forma módulo-argumental, compruebe que $\dfrac{u}{v} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i sen\dfrac{\pi}{12}\right)$

c) A partir de lo anterior, halle el valor exacto de $tg\,\pi/12$, expresando la respuesta en la forma $a + b\sqrt{3}$, donde $a, b \in Z$

22 Sea la serie geométrica $1 + \dfrac{1}{3}e^{i\theta} + \dfrac{1}{9}e^{2i\theta} + ...$

a) Halle la razón común, z, de la serie y compruebe que $|z| = \dfrac{1}{3}$

b) Halle una expresión para esta suma infinita.

c) A partir de lo anterior, demuestre que: $sen\theta + \dfrac{1}{3}sen2\theta + \dfrac{1}{9}sen3\theta + ... = \dfrac{9sen\theta}{10 - 6\cos\theta}$

23 Sea $z = \cos\theta + i\,sen\theta$ con $-\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$

a) Desarrolla z^3 con el binomio de Newton

b) Partiendo de este desarrollo y de la fórmula de Moivre demuestra las fórmulas: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ y $sen3\theta = 3\,sen\theta - 4sen^3\theta$