MODELO 1

①

$$xy = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$1\cdot y + x\cdot y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2} \quad ; \quad xy' = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} - y \quad ; \quad xy' = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} - y \quad ;$$

$$y' = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} - y\right)$$

$$x = 1 \rightarrow 1\cdot y = \arcsin\frac{1}{2} \quad ; \quad y = \pi/6$$

$$\rightarrow y' = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{\sqrt{4-1}} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}-\pi}{6}$$

Recta Normal : $\boxed{y - \frac{\pi}{6} = -\frac{6}{2\sqrt{3}-\pi}(x-1)}$

②

$$f(x) = \frac{1-e^x}{x^2}$$

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

- $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{2x} = \frac{-1}{0} = \infty \Rightarrow$ $\boxed{\text{Asíntota Vertical } x=0}$

- $\lim_{x\to -\infty} \frac{1-e^x}{x^2} = \frac{1-0}{+\infty} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Asíntota Horizontal } y=0 \text{ cuando } x\to-\infty}$

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{1-e^x}{x^2} = \frac{-\infty}{+\infty}$

$= \lim_{x\to +\infty} \frac{-e^x}{2x} = \frac{-\infty}{+\infty}$

$= \lim_{x\to +\infty} \frac{-e^x}{2} = -\infty \rightarrow$ No tiene Asíntota Horizontal cuando $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^x}{x^3} = \frac{-\infty}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-e^x}{3x^2} = \frac{-\infty}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-e^x}{6x} = \frac{-\infty}{+\infty} =$$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-e^x}{6} = -\infty \rightarrow$ No tiene Asíntota oblicua cuando $x\to+\infty$

③ $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x^2)}$

$\ln(x^2)=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \longrightarrow \boxed{\text{dom} f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}}$

$$f'(x) = \frac{\ln(x^2) - x\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{\ln^2(x^2)} = \frac{\ln(x^2)-2}{\ln^2(x^2)}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x\cdot \ln^{\cancel{2}}(x^2) - (\ln(x^2)-2)\cdot 2\ln(\cancel{x^2})\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{\ln^{\cancel{4}\,3}(x^2)} =$$

$$= \frac{\frac{2\ln(x^2)}{x} - \frac{4\ln(x^2)}{x} + \frac{8}{x}}{\ln^3(x^2)} = \frac{8-2\ln(x^2)}{x\ln^3(x^2)}$$

$f''(x)=0 \longrightarrow 8-2\ln(x^2)=0$; $\ln(x^2)=4$; $x^2=e^4$; $x=\pm\sqrt{e^4} = \boxed{\pm e^2}$

		$-e^2$		-1		0		1		e^2	
f''	$+$		$-$		$+$		$-$		$+$		$-$
f	Cónc.		Conv.		Cónc.		Conv.		Cónc.		Convexa
		INF								INF	

Puntos de Inflexión: $\boxed{\left(e^2, \frac{e^2}{4}\right) \quad \left(-e^2, -\frac{e^2}{4}\right)}$

④ a) $\dfrac{e^{ax}}{1-x}$ no estaría definido en $x=1$, pero $1 \not< 0$ $\Big\}\Rightarrow \text{dom} f = \mathbb{R}$

$1-\text{sen}(2x)$ está definido en $\mathbb{R}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{e^0}{1-0} = 1$

$f(0) = \dfrac{e^0}{1-0} = 1$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1-\text{sen}\,0 = 1$

$\Big\} \Rightarrow f$ es continua en $x=0$ para $\boxed{a\in\mathbb{R}}$

c) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{ae^{ax}(1-x) - e^{ax}\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{e^{ax}(a-ax+1)}{(1-x)^2} & \text{si } x<0 \\ -\cos(2x)\cdot 2 & \text{si } x>0 \end{cases}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{1\cdot(a-0+1)}{1^2} = a+1$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -2\cos 0 = -2$

$\Big\}$ $a+1=-2 \Rightarrow \boxed{a=-3}$

Resulta Derivable para $\boxed{a=-3}$

⑤

$\dfrac{dH}{dt} = 3$ mm/siglo

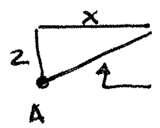
$\dfrac{dR}{dt} = -0'5$ mm/siglo

$V = \dfrac{\pi R^2 H}{3}$; $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{\pi}{3}\left(2R\dfrac{dR}{dt}H + R^2\dfrac{dH}{dt}\right) = \dfrac{\pi}{3}\left(2RH\cdot(-0'5) + R^2\cdot 3\right) =$

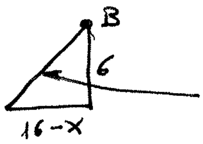
$= \dfrac{\pi}{3}\left(3R^2 - RH\right)$

$$\left.\begin{array}{l} H=200 \\ R=40 \end{array}\right| \longrightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left(3\cdot 40^2 - 40\cdot 200\right) = -3351 \text{ km}^3/\text{siglo}$$

⑥ a)



$\sqrt{x^2+2^2} = \sqrt{x^2+4}$

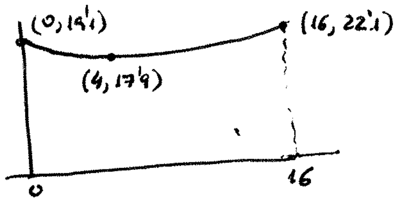


$\sqrt{(16-x)^2+6^2} = \sqrt{x^2-32x+292}$

$f(x) = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2-32x+292} + K$ ✓

b) Al estar únicamente sumando, la constante K no debe influir en la optimización de f(x). Otra manera de entenderlo es que la constante K no aparece en la expresión de f'(x).

En consecuencia introducimos la función $\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2-32x+292}$ en la calculadora gráfica, observando:



Deberíamos construir el puente con $\boxed{x = 4 \text{ Km}}$, siendo longitud mínima = 17'9 Km

Comparando los puntos inicial y final del dominio, la peor solución sería con $\boxed{x = 16 \text{ Km}}$ siendo longitud máxima = 22'1 Km

MODELO 2

①

$$y = e^{xy}$$

$$y' = e^{xy}\cdot(y + x\cdot y') \; ; \quad y' - xe^{xy}y' = e^{xy}\cdot y \; ; \quad y' = \frac{e^{xy}\cdot y}{1-xe^{xy}}$$

$$x=0 \rightarrow y = e^{0\cdot y} \; ; \quad y = 1 \quad \boxed{P(0,1)}$$

$$\rightarrow y' = \frac{e^{0\cdot 1}\cdot 1}{1-0\cdot e^{0\cdot 1}} = 1 \qquad m = 1 \Rightarrow m' = -1$$

Recta Normal

$$y - 1 = -1(x-0)$$

$$\boxed{y = 1 - x}$$

②

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^3} \qquad \text{dom} f = (0, +\infty)$$

a) $$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^3 - \ln x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2(1-3\ln x)}{x^6} = \frac{1-3\ln x}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{3}{x}\cdot x^4 - (1-3\ln x)\cdot 4x^3}{x^8} = \frac{-3x^3 - 4x^3 + 12x^3\ln x}{x^8} = \frac{12\ln x - 7}{x^5}$$

b) $$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{3} \; ; \quad x = e^{1/3}$$

$$f''(e^{1/3}) = \frac{12\cdot 1/3 - 7}{(e^{1/3})^5} = \frac{-3}{e^{5/3}} < 0 \Rightarrow \boxed{\text{Máximo local en } x = e^{1/3}}$$

c) $$f''(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 7/12 \; ; \quad x = e^{7/12}$$

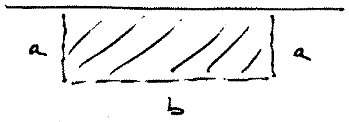
	0	$e^{7/12}$	$+\infty$
f''	$-$	$+$	
f	convexo	cóncava	

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Punto Inflexión en } x = e^{7/12}}$

③

Maximizar : $A = a\cdot b$

Siendo : $2a + b = 1000$



$$b = 1000 - 2a \longrightarrow A = a(1000-2a) = 1000a - 2a^2 \; ; \quad a \in [0, 500]$$

$$\frac{dA}{da} = 1000 - 4a$$

$$\frac{dA}{de} = 0 \Rightarrow a = 250$$

	0	250	500
A'	$+$	$-$	
A	↗	↘	
		MAX	

$$\text{Area Máxima} = 1000\cdot 250 - 2\cdot 250^2 = \boxed{125000 \text{ m}^2} \quad \text{con} \quad \boxed{\begin{array}{l} b = 500 \text{ m} \\ a = 250 \text{ m} \end{array}}$$

④

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x = 0 \\ \frac{m(e^x-1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

a) $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{m\cdot(1-1)}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{me^x}{1} = m$$

$$f(0) = 4$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = - - - - - - - - - - - = m$$

Para $\boxed{m=4}$ f es continua en $x=0$

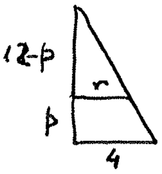
b) $f'(x) = m \cdot \dfrac{e^x \cdot x - (e^x - 1) \cdot 1}{x^2} = m \cdot \dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2} \qquad (x \neq 0)$

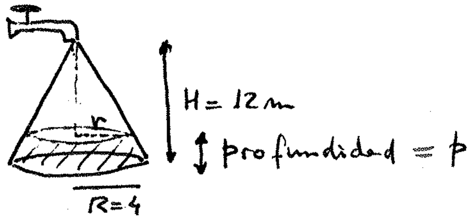
$$\lim_{x \to 0} f'(x) = m \frac{1 \cdot (-1) + 1}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} m \frac{e^x(x-1) + e^x \cdot 1}{2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} m \frac{\cancel{x} e^x}{2 \cancel{x}} = m \cdot \frac{1}{2} = \frac{m}{2}$$

- Si $m = 4$, f sería derivable en $x=0$ por ser continua y finito el $\lim\limits_{x \to 0} f'$, sería: $f'(0) = \frac{4}{2} = \boxed{2}$
- Si $m \neq 4$, f no sería derivable en $x=0$ por no ser continua, aunque el resultado del $\lim\limits_{x \to 0} f'$ fuera finito.

⑤





$$\frac{r}{12-p} = \frac{4}{12} \Rightarrow r = \frac{1}{3(12-p)}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 12}{3} - \frac{\pi \cdot r^2 \cdot (12-p)}{3} = 64\pi - \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{3(12-p)}\right)^2 \cdot (12-p) =$$

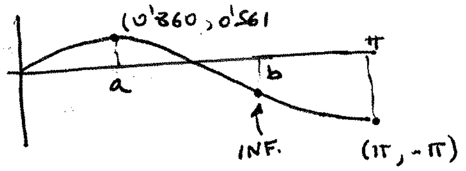
$$= 64\pi - \frac{\pi}{27(12-p)}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\pi}{27} \frac{+\, dp/dt}{(12-p)^2} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -\frac{27(12-p)^2}{\pi} \cdot \frac{dV}{dt} = -\frac{270}{\pi}(12-p)^2$$

$$p = 6 \longrightarrow \frac{dp}{dt} = -\frac{270}{\pi} \cdot 6^2 = \boxed{-3094 \text{ m/min}}$$

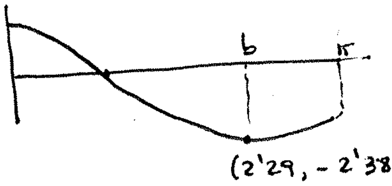
⑥ $f(x) = x \cos x \qquad x \in [0, \pi]$

a)



← Visión de f con la calculadora
$\boxed{a = 0'860}$ buscando su máximo

b) $f'(x) = \cos x - x \operatorname{sen} x$



← Visión de f' con la calculadora
$\boxed{b = 2'29}$ buscando su mínimo.

MODELO 3

①
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{ax} & \text{si } x > 0 \\ bx+c & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$\sqrt[3]{x}$ y $bx+c$ son expresiones continuas. Únicamente nos quedaría entonces garantizar la continuidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to 0^-} f(x) = c \\ f(0) = c \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{c=0} \text{ para que } f \text{ sea continua en } x=0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{si } x>0 \\ b & \text{si } x<0 \end{cases}$$

f tiene un máximo en $x=-1 \Rightarrow f'(-1)=0 \rightarrow \quad b=0 \; ; \; b=0$

f tiene en $x=1$ una recta tangente paralela a $y=2x \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(1)=2 \rightarrow \frac{\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{1^2}}=2 \; ; \; \sqrt[3]{a}=6 \; ; \; a=216$$

②
$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x-x^2 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

- $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{(2(1+h)+1)-(2\cdot 1+1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{2+2h+1-3}{h} =$

  $= \lim_{h\to 0^-} \dfrac{2h}{h} = \boxed{2}$

- $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{[4(1+h)-(1+h)^2]-(2\cdot 1+1)}{h} =$

  $= \lim_{h\to 0^+} \dfrac{4+4h-1-2h-h^2-3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{2h-h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} (2-h) = \boxed{2}$

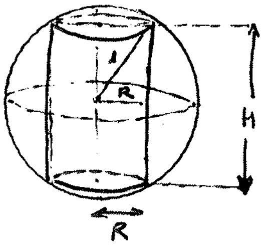
Al coincidir ambos límites, la derivada existe : $\boxed{f'(1)=2}$

③

$$R^2+\left(\frac{H}{2}\right)^2=1 \; ; \; 4R^2+H^2=4 \; ; \; R^2=\frac{4-H^2}{4}$$

Maximizar : $V = \pi R^2 H = \pi \dfrac{4-H^2}{4} \cdot H =$

$= \dfrac{\pi}{4}(4H-H^3)$



$$\frac{dV}{dH} = \frac{\pi}{4}(4-3H^2)$$

$$\frac{dV}{dH}=0 \Rightarrow H=\sqrt{4/3}$$

	0		$\sqrt{4/3}$		2
V'		+		−	
V		↗		↘	
			MAX		

Volumen Máximo $= \dfrac{\pi}{4}\left(4\sqrt{\dfrac{4}{3}} - \left(\sqrt{\dfrac{4}{3}}\right)^3\right) =$

$= \boxed{2'02 \text{ m}^3}$

④ $y = 2\sqrt{\frac{2}{x}-1}$

a) Por un lado $x \neq 0$, y además: $\frac{2}{x}-1 \geq 0$; $\frac{2-x}{x} \geq 0$

signo $\frac{2-x}{x}$

	0		2	
−		+		−

$\boxed{\text{dominio} = (0,2]}$

$$y' = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\frac{2}{x}-1}}\cdot\frac{-2}{x^2} = \frac{-2}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}-1}}$$

$y'=0 \Rightarrow \frac{-2}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}-1}} = 0$; $-2=0$ Absurdo

	0	2
y'	−	
y	↘	

La función es $\boxed{\text{decreciente}}$ en todo su dominio.

Para facilitar la 2ª derivada, simplificaremos la 1ª:

$$y' = \frac{-2}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}-1}} = \frac{-2}{\sqrt{x^4\left(\frac{2}{x}-1\right)}} = \frac{-2}{\sqrt{2x^3-x^4}}$$

$$y'' = \frac{+\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2x^3-x^4}}(6x^2-4x^3)}{(\sqrt{2x^3-x^4})^2} = \frac{6x^2-4x^3}{(2x^3-x^4)\sqrt{2x^3-x^4}} = \frac{6-4x}{(2x-x^2)\sqrt{2x^3-x^4}}$$

$y''=0 \Rightarrow \frac{6-4x}{(2x-x^2)\sqrt{2x^3-x^4}} = 0$; $6-4x=0$; $x = 3/2$

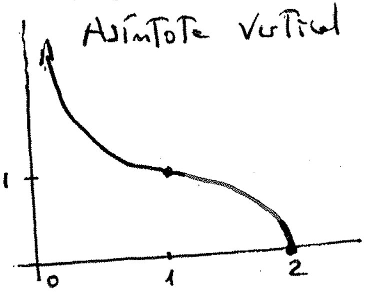
	0		3/2		2
y''		+		−	
y		Cóncava	INF	Conv.	

x	y
0^+	$+\infty$
3/2	1'15
2	0

$\lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{\frac{2}{x}-1} = 2\sqrt{+\infty} = +\infty$

Asíntota vertical $x = 0^+$

b)



⑤ a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) = +\infty-\infty = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} = \frac{0}{0} =$

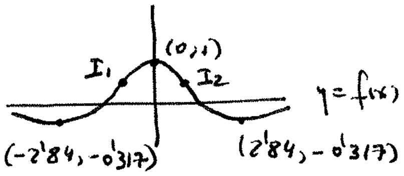
$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x} = \boxed{\frac{1}{2}}$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = 1^{+\infty} = e^{\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x} = e^{\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)} = e^{\infty\cdot 0} =$

$= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{1/x}} = e^{\frac{0}{0}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\cdot\frac{-2}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}} =$

$= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-2}{x^2+2x}}{-1/x^2}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+2x}} = \boxed{e^2}$

⑥ Representando $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}}$ con la calculadora gráfica observamos:

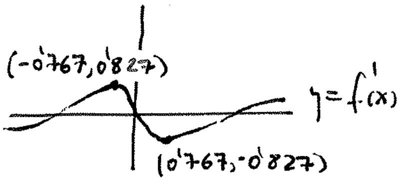


Tenemos: $\boxed{\begin{array}{l} \text{Máximo Local en } (0,1) \\ \text{Mínimos Locales en } (-2'84, -0'317) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (2'84, -0'317) \end{array}}$

Y se preven dos inflexiones, I_1 e I_2.

Representando la función derivada:

$$f'(x) = \frac{-\sin x \cdot \sqrt{x^2+1} - \cos x \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$



Los extremos locales de $f'(x)$ serán las inflexiones de $f(x)$.

$f(x)$ tiene $\boxed{\begin{array}{l} \text{inflexiones en } (-0'767, 0'571) \\ \qquad\qquad\quad (0'767, 0'571) \end{array}}$

MODELO 4

① $f(x) = \begin{cases} 3\,\mathrm{sen}\,x - \cos x & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{mx+n}{1-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a)

$3\,\mathrm{sen}\,x - \cos x$ es continua en cualquier $x \in \mathbb{R}$

$\dfrac{mx+n}{1-x}$ no estaría definida en $x=1$, pero $1 \not< 0$. Por lo tanto

Tendremos: $\boxed{\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}}$

b)

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{mx+n}{1-x} = n$

$f(0) = 3\,\mathrm{sen}\,0 - \cos 0 = 3$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (3\,\mathrm{sen}\,x - \cos x) = 3$

$\Rightarrow \boxed{n=3}$ para que f sea continua en $x=0$.

'm' podría tomar cualquier valor.

c) $f'(x) = \begin{cases} 3\cos x + \mathrm{sen}\,x & \text{si } x>0 \\ \dfrac{m(1-x) - (mx+n)(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{m+n}{(1-x)^2} & \text{si } x<0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \dfrac{m+n}{(1-0)^2} = m+n$

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 3\cos 0 + \mathrm{sen}\,0 = 3$

$\longrightarrow \boxed{m+n=3}$

Como la derivabilidad exige la continuidad, deben cumplirse ambas condiciones:

$\left.\begin{matrix} n=3 \\ m+n=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} n=3 \\ m=0 \end{matrix}}$ para que sea derivable en $x=0$

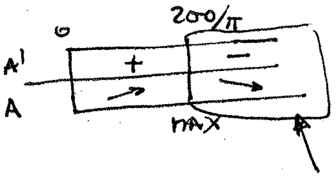
② Maximizar $A = \pi\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + xy = \dfrac{\pi x^2}{4} + xy$

Siendo: $200 = 2\pi\cdot\dfrac{x}{2} + 2y = \pi x + 2y \longrightarrow y = 100 - \dfrac{\pi}{2}x$

$A = \dfrac{\pi x^2}{4} + x\left(100 - \dfrac{\pi}{2}x\right) = \dfrac{\pi x^2}{4} + 100x - \dfrac{\pi x^2}{2} = 100x - \dfrac{\pi x^2}{4}$

$\dfrac{dA}{dx} = 100 - \dfrac{\pi}{4}\cdot 2x = 100 - \dfrac{\pi}{2}x$

$\dfrac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow 100 - \dfrac{\pi}{2}x = 0 \;;\; x = \dfrac{200}{\pi}$



En realidad, este intervalo no sería posible, ya que sería $y<0$.

Área Máxima para $\boxed{x = \dfrac{200}{\pi}\ m} \rightarrow \boxed{y = 0\ m}$

Área Máxima $= \boxed{3183\ m^2}$

El recinto tendría forma circular.

③

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}\sin x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}\sin x+\sqrt{1+x^2}\cos x}=\frac{1}{0+1\cdot 1}=\boxed{1}$$

b) $$\lim_{x\to\pi/2}(1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}=(1+0)^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}=e^{\lim_{x\to\pi/2}\ln(1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}}=$$

$$=e^{\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{\cos x}\ln(1+2\cos x)}=e^{\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln(1+2\cos x)}{\cos x}}=e^{\frac{\ln 1}{0}}=e^{\frac{0}{0}}=$$

$$=e^{\lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{\cancel{-}2\cancel{\sin x}}{1+2\cos x}}{\cancel{-\sin x}}}=e^{\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{1+2\cos x}}=e^{1/1}=\boxed{e}$$

④

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c\longrightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b\longrightarrow f''(x)=6x+2a$$

$$f'(2)=0\Rightarrow 3\cdot 2^2+2a\cdot 2+b=0\;;\quad 4a+b=-12$$

$$f'(4)=0\Rightarrow 3\cdot 4^2+2a\cdot 4+b=0\;;\quad 8a+b=-48$$

$$f''(x)=0\Rightarrow 6x+2a=0\;;\quad x=\frac{-2a}{6}=-\frac{a}{3}\longrightarrow y=\left(-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{a}{3}\right)^2+b\frac{-a}{3}+c=$$

$$=\frac{-a^3}{27}+\frac{a^3}{9}-\frac{ab}{3}+c=$$

$$=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c$$

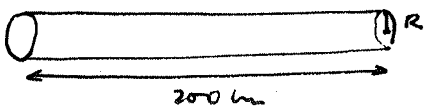
$$\begin{array}{l} 4a+b=-12 \\ 8a+b=-48 \\ \hline 4a\quad=-36 \end{array}\longrightarrow\boxed{a=-9}\;;\quad 4\cdot(-9)+b=-12\;;\quad\boxed{b=24}$$

Que la inflexión se produzca sobre el eje X significa que:

$$\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c=0\;;\quad c=\frac{ab}{3}-\frac{2a^3}{27}=\frac{(-9)\cdot 24}{3}-\frac{2(-9)^3}{27}=\boxed{-18}$$

⑤

$$V=\pi R^2\cdot 200=200\pi R^2$$

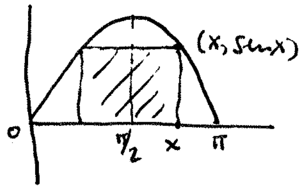


$$\frac{dV}{dt}=200\pi\cdot 2R\frac{dR}{dt}=400\pi R\frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt}=30\Rightarrow 30=400\pi R\frac{dR}{dt}\;;\quad\frac{dR}{dt}=\frac{3}{40\pi R}$$

$$R=2\Rightarrow\frac{dR}{dt}=\frac{3}{40\pi\cdot 2}=0'0119\text{ cm/seg.}$$

⑥

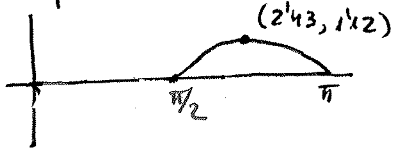


$$\text{Base}=2\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=2x-\pi$$

$$\text{Altura}=\operatorname{sen}x$$

$$\text{Área}=(2x-\pi)\operatorname{sen}x\qquad x\in[\pi/2,\pi]$$

Representando la función $y=(2x-\pi)\operatorname{sen}x$ con la calculadora gráfica:



Tendremos el máximo valor de área para $x=2'43$, $\boxed{A_{MAX}=1'12}$

MODELO 5

①
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{3}\right)^{+\infty} = 1^{\infty} = e^{\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{2x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}2x\ln\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)} =$$

$$= e^{\infty\cdot 0} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)}{1/2x}} = e^{\frac{0}{0}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x-1)-\ln(3x+4)}{1/2x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{3x-1}-\frac{3}{3x+4}}{\frac{-2}{(2x)^2}}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\cancel{9x}+12-\cancel{9x}+3}{(3x-1)(3x+4)}}{-\frac{1}{2x^2}}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{-30x^2}{(3x-1)(3x+4)}} =$$

$$= e^{-\frac{30}{9}} = \boxed{e^{-10/3}}$$

②
$$y = 3x - tg\,x \longrightarrow y' = 3-(1+tg^2x) = 2-tg^2x$$

Recta Tangente paralela a $y=x-2 \Rightarrow y'=1 \longrightarrow 1 = 2-tg^2x \;;\; tg^2x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\,x = \pm 1 \longrightarrow x = \pi/4$ Única solución para $x\in(0,\pi/2)$

$x = \pi/4 \to y = 3\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - 1$

$x = \pi/4 \to y' = 1$

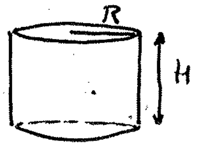
$$y - \left(\frac{3\pi}{4}-1\right) = 1\cdot(x-\pi/4)$$

$$y = x - \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} - 1$$

$$\boxed{y = x + \frac{\pi}{2} - 1}$$

③ Minimizar : $A = 2\pi R^2 + 2\pi RH$

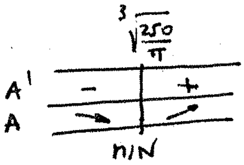
Siendo : $\pi R^2 H = 500$



$\longrightarrow H = \frac{500}{\pi R^2} \longrightarrow A = 2\pi R^2 + 2\cancel{\pi}\cancel{R}\frac{500}{\cancel{\pi}R^{\cancel{2}}} = 2\pi R^2 + \frac{1000}{R}$

$$\frac{dA}{dR} = 4\pi R - \frac{1000}{R^2} = \frac{4\pi R^3 - 1000}{R^2}$$

$$\frac{dA}{dR} = 0 \Rightarrow \frac{4\pi R^3 - 1000}{R^2} = 0 \;;\; 4\pi R^3 = 1000 \;;\; R = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$$



Superficie Mínima para $\boxed{R = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}\ \text{cm}}$

④
$$f(x) = \begin{cases} x^2+6x+8 & \text{si } x\le -2 \\ 2x+4 & \text{si } -2<x\le 0 \\ a\cos x & \text{si } x>0 \end{cases} \qquad \text{dom} f = \mathbb{R}$$

a) Los tres trozos de f(x) tienen expresiones continuas, puede estudiar la continuidad en $x=-2$, $x=0$:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-2^-} f(x) &= (-2)^2+6\cdot(-2)+8 = 0 \\ f(-2) &= (-2)^2+6\cdot(-2)+8 = 0 \\ \lim_{x\to-2^+} f(x) &= 2\cdot(-2)+4 = 0 \end{aligned}\right| \longrightarrow f \text{ es continua en } x=-2$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2\cdot 0+4 = 4 \\ f(0) = 2\cdot 0 + 4 = 4 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = a\cos 0 = a\end{array}\right| \longrightarrow \boxed{a=4}$$ para que f sea continua en $x=0$

b) $f'(x) = \begin{cases} 2x+6 & \text{si } x<-2 \\ 2 & \text{si } -2<x<0 \\ -a\sin x & \text{si } x>0 \end{cases}$ Queda estudiar la derivabilidad en $x=-2$, $x=0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -2^-} f'(x) = 2\cdot(-2)+6 = 2 \\ \lim_{x\to -2^+} f'(x) = 2\end{array}\right| \Rightarrow$$ f es derivable en $x=-2$ $f'(-2)=2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 2 \\ \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0\end{array}\right| \Rightarrow$$ f <u>no</u> es derivable en $x=0$ para ningún valor de 'a'

c)
- $y = x^2+6x+8$

  $y' = 2x+6 \longrightarrow$ Vértice en $x=-3$; $V(-3,-1)$

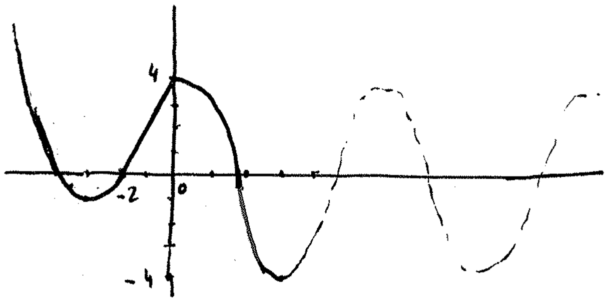
  $x^2+6x+8=0 \longrightarrow x = \frac{-6\pm\sqrt{36-32}}{2} = \begin{cases}-2 & (-2,0) \\ -4 & (-4,0)\end{cases}$

- $y = 2x+4$

x	y
-2	0
0	4

- $y = 4\cos x$

x	y
0	4
π/2	0
π	-4
⋮	⋮



⑤ $f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$

$\text{dom} f = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1 - \frac{1}{-\infty} = 1^+ \\ \lim_{x\to -\infty} f(x) = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1^-\end{array}\right| \longrightarrow$$ Asíntota Horizontal $y=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -1^-} f(x) = 1 - \frac{1}{-1^-+1} = 1 - \frac{1}{-0} = 1+\infty = +\infty \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = 1 - \frac{1}{-1^++1} = 1 - \frac{1}{+0} = 1-\infty = -\infty\end{array}\right| \longrightarrow$$ Asíntota Vertical $x=-1$

$f'(x) = -\frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2}=0$; $1=0$ Absurdo

		-1	
f'	+		+
f	↗		↗

f es creciente en todo su dominio

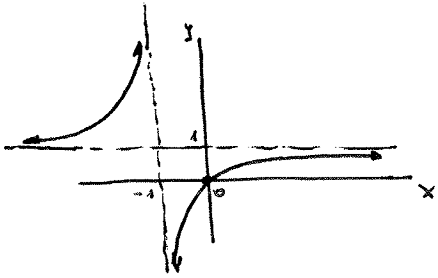
<u>No</u> tiene extremos locales.

$$f''(x) = \frac{-2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-2}{(x+1)^3}$$

$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{-2}{(x+1)^3}=0 \; ; \; -2=0$ Absurdo. No tiene Inflexiones

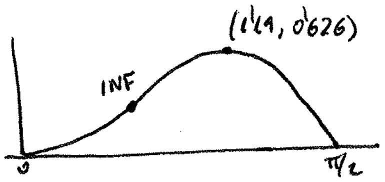
-1

f''	+	−
f	Cóncava	Convexa



⑥ $f(x) = x^3 \cos x \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$

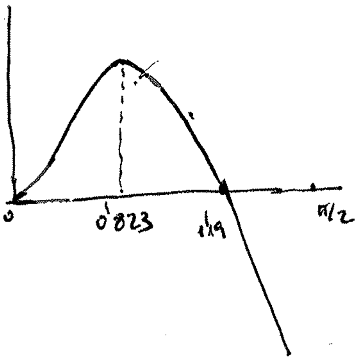
Representando en la calculadora gráfica :



$f'(x) = 3x^2 \cos x + x^3 \cdot (-\operatorname{sen} x) = x^2 \cdot (3\cos x - x \operatorname{sen} x)$

Representando f' en la calculadora gráfica :

El máximo de f' nos indica la posición del punto de Inflexión de f: $x = 0'823$.



Máximo local : (1'19, 0'626)
Punto de Inflexión : (0'823, 0'379)

MODELO 6

①

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{a\cos ax}{1} = \boxed{a}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cancel{2}\cos x \sin x}{\cancel{2}x} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{+\sin x\cdot\sin x - \cos x\cdot\cos x}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{+\sin^2 x - \cos^2 x}{1} = \boxed{-1}$$

$\boxed{a=-1}$

②

Sea $x=a$ el punto de Tangencia.

$G_1: \ y = -x^2+2x-4 \longrightarrow y' = -2x+2$

$x=a \longrightarrow y = -a^2+2a-4$

$\qquad \longrightarrow y' = -2a+2$

$G_2: \ y = x^2+Kx+K \longrightarrow y' = 2x+K$

$x=a \longrightarrow y = a^2+Ka+K$

$\qquad \longrightarrow y' = 2a+K$

AL coincidir punto y pendiente:

$$\left.\begin{aligned} a^2+Ka+K &= -a^2+2a-4 \\ 2a+K &= -2a+2 \end{aligned}\right\} \ ; \quad \left.\begin{aligned} 2a^2+(K-2)a+(K+4)=0 \\ K = \boxed{2-4a} \end{aligned}\right\}$$

$2a^2 + (\cancel{2}-4a-\cancel{2})a + (2-4a+4) = 0$

$2a^2 - 4a^2 + 6 - 4a = 0$

$-2a^2 - 4a + 6 = 0$

$a + 2a - 3 = 0$

$a = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} \begin{cases} 1 \longrightarrow K = 2-4\cdot 1 = -2 \\ -3 \longrightarrow K = \cancel{2-4\cdot(-3)=14} \end{cases}$ No es solución porque $K<0$.

$\boxed{K=-2}$

$a=1 \longrightarrow y = -1^2+2\cdot 1-4 = -3$ $\quad \boxed{P(1,-3)}$

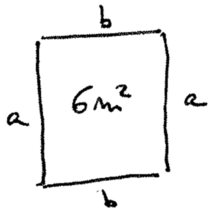
③

Minimizar : $C = 2a\cdot 30 + 2b\cdot 60 =$

$\qquad = 60a + 120b$

Siendo : $a\cdot b = 6$

$\qquad \boxed{b = \frac{6}{a}}$



$C = 60a + 120\frac{6}{a} = 60a + \frac{720}{a}$

$\frac{dC}{da} = 60 - \frac{720}{a^2}$

$$\frac{dC}{da}=0 \Rightarrow 60-\frac{720}{a^2}=0 \ ; \quad 60=\frac{720}{a^2} \ ; \quad a^2=12 \ ; \quad a=\begin{cases}\sqrt{12}\\ \cancel{-\sqrt{12}}\end{cases}$$

	0		$\sqrt{12}$		$+\infty$
C'		−		+	
C		↘		↗	
			MIN		

Coste Mínimo para $\boxed{a=\sqrt{12}\ m} \longrightarrow \ b=\frac{6}{\sqrt{12}}=\frac{6\sqrt{12}}{12}=\boxed{\frac{\sqrt{12}}{2}\ m}$

④ $$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(1+h)^2-1}{\cancel{1}+h-\cancel{1}}-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\cancel{1}+2h+h^2-\cancel{1}}{h}-4}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2h+h^2}{h}-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2+h-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-2}{h}=\frac{-2}{0}=\infty .$$

f <u>no</u> es derivable en $x=1$ por no ser un límite finito.

La derivabilidad se garantizaría modificando la definición de la función. Por ejemplo serviría: $f(x)=\begin{cases}\boxed{2} & \text{si } x=1\\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x\neq 1\end{cases}$

⑤ $y=ax^3+bx^2+cx+d \longrightarrow y'=3ax^2+2bx+c \Rightarrow y''=6ax+2b$

$P(2,1) \longrightarrow 1=8a+4b+2c+d$

Inflexión en $x=2 \longrightarrow 0=12a+2b$

Tangente Horizontal en $x=2 \longrightarrow 0=12a+4b+c$

$O(0,0) \longrightarrow \boxed{0=d}$

$$\left.\begin{array}{l}8a+4b+2c=1\\ 6a+b=0\\ 12a+4b+c=0\end{array}\right\} \longrightarrow b=-6a$$

$$\left.\begin{array}{l}8a-24a+2c=1\\ 12a-24a+c=0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}-16a+2c=1\\ -12a+c=0\end{array}\right\} \longrightarrow c=12a$$

$-16a+24a=1$

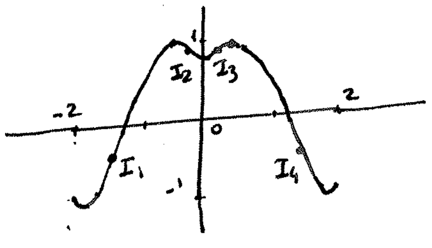
$8a=1 \ ; \ \boxed{a=1/8} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}b=-\frac{6}{8}\\ c=\frac{12}{8}\end{array}}$

$$\boxed{y=\frac{1}{8}(x^3-6x^2+12x)}$$

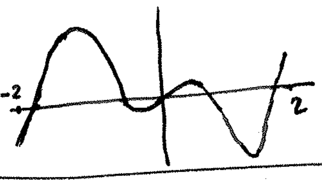
⑥ Representamos $y=\text{sen}(x^2+1)$ $\quad -2<x<2$ con la calculadora gráfica observando los siguientes extremos locales:

Mínimos : (−1'93,−1); (0,0'841); (−1'93,−1)

Máximos : (−0'756,1) ; (0'756,1)



Se prevén cuatro inflexiones



Representamos $y'=\cos(x^2+1)\cdot 2x$, observando cuatro extremos que se corresponden con las inflexiones de $y=\text{sen}(x^2+1)$: I_1(−1'53,−0'198); I_2(−0'443, 0'931); I_3(1'53, −0'198); I_4(0'443, 0'931)

MODELO 7

①

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen}x} = 0^0 = e^{\lim_{x\to 0^+} \ln x^{\operatorname{sen}x}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}x \cdot \ln x} = e^{0\cdot\infty} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/\operatorname{sen}x}} = e^{-\infty/\frac{1}{0}} = e^{-\infty/\infty} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\cos x/\operatorname{sen}^2 x}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{-x\cos x}} = e^{\frac{0}{0}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{-\cos x + x\operatorname{sen}x}} = e^{\frac{0}{-1+0}} = e^0 = \boxed{1}$$

②

$$8y\ln x - 2x^2 + 4y^2 = 7$$

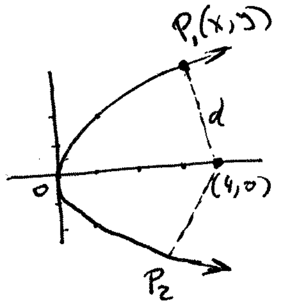
$$8y'\ln x + 8y\frac{1}{x} - 4x + 8yy' = 0 \quad ; \quad 8y'(\ln x + y) = 4x - \frac{8y}{x} \; ; \quad y' = \frac{x - 2y/x}{2(\ln x + y)}$$

$$x = 1 \rightarrow 8y\cdot 0 - 2 + 4y^2 = 7 \rightarrow 4y^2 = 9 \rightarrow y = \begin{cases} 3/2 \\ \cancel{-3/2} \text{ porque } y>0 \end{cases}$$

$$\rightarrow y' = \frac{1 - \frac{2\cdot 3/2}{1}}{2(\ln 1 + \frac{3}{2})} = \frac{1-3}{3} = -\frac{2}{3}$$

Recta Tangente : $\boxed{y - \frac{3}{2} = -\frac{2}{3}(x-1)}$

③



$$d = \left| \begin{matrix} x-4 \\ y \end{matrix} \right| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$$

Minimizar $d = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$

Siendo $y^2 = 4x$

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + 4x} = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + 4x} = \sqrt{x^2 - 4x + 16} \quad , \quad x \geq 0$$

$$d' = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+16}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+16}}$$

$$d' = 0 \Rightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+16}} = 0 \; ; \quad x = 2$$

	0		2	
d'		−		+
d		↘		↗
			MIN	

Mínima distancia para $x = 2$.

$$x = 2 \rightarrow y^2 = 4\cdot 2 \; ; \quad y = \pm\sqrt{8}$$

$$\boxed{P_1(2,\sqrt{8}) \quad P_2(2,-\sqrt{8})}$$

④ $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2-4 & x<0 \\ -a(x-2)^2+4a & x\geq 0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = (0+2)^2-4 = 0$

$f(0) = -a(0-2)^2+4a = -4a+4a=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -a(0-2)^2+4a = -4a+4a=0$

$\Rightarrow$ f es continua en $x=0$ para cualquier $a\in\mathbb{R}$

b) $f'(x) = \begin{cases} 2(x+2) & x<0 \\ -2a(x-2) & x>0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 2(0+2) = 4$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -2a(0-2) = 4a$

$\Rightarrow$ f será derivable en $x=0$ para: $4a=4 \Rightarrow \boxed{a=1}$

y la derivada será $f'(0)=4$

⑤ $f(x) = \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{12}{x^2-9} = \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{12}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{2(x+3)-12}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{2x-6}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{2x-6}{x^2-9}$

a) $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R} - \{3,-3\}$

b) $f'(x) = \dfrac{2(x^2-9)-(2x-6).2x}{(x^2-9)^2} = \dfrac{2x^2-18-4x^2+12x}{(x^2-9)^2} = \dfrac{-2x^2+12x-18}{(x^2-9)^2} = \dfrac{-2(x^2-6x+9)}{(x^2-9)^2}$

$f'(x)=0 \rightarrow \dfrac{-2(x^2-6x+9)}{(x^2-9)^2}=0$; $x^2-6x+9=0$;

$x = \dfrac{6\pm\sqrt{36-36}}{2} = \dfrac{6\pm 0}{2} = 3$. Imposible porque no pertenece al dom f.

		-3		3	
f'	−		−		−
f	↘		↘		↘

f es decreciente en todo su dominio.

c) f no puede ser continua en $x=3$ por no estar definida en dicho valor de x.

Veamos el tipo de discontinuidad:

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2}{x-3} - \dfrac{12}{x^2-9}\right) = \infty-\infty = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x-6}{x^2-9} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2}{2x} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3}$

f tiene una discontinuidad EVITABLE en $x=3$

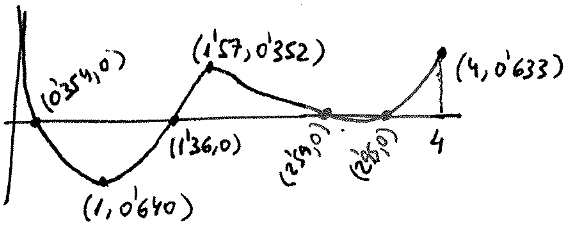
d) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{2x-6}{x^2-9} = \dfrac{-6-6}{+0} = \boxed{-\infty}$

$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{2x-6}{x^2-9} = \dfrac{-6-6}{-0} = \boxed{+\infty}$

Salto Infinito en $x=-3$

⑥

a) Observado con la calculadora gráfica:



Puntos corte con eje X: (0'354,0)
(1'36,0)
(2'59,0)
(2'95,0)

Máximo local: (1'57, 0'352)

Mínimos locales: (1, 0'640)
(2'59, 0)

b) $|\ln x| > |\cos x| + 0'1 \Rightarrow |\ln x| - |\cos x| - 0'1 > 0$.

Observando los intervalos en los que $f(x) > 0$:

$$\boxed{x \in (0, 0'354) \cup (1'36, 2'59) \cup (2'95, 4)}$$

MODELO 8

①

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1-x}{1-\cos^2 x}=\frac{1-1-0}{1-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x+1}}-1}{+2\cos x\,\sin x}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2x+1}}\cdot\cancel{2}}{2x+1}}{-2\sin^2 x+2\cos^2 x}=\frac{-1}{-0+2}=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

b) $$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \operatorname{ctg}x=0\cdot\infty=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\operatorname{tg}x\,(1+\operatorname{tg}^2 x)}=\frac{1}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}(1-\cos x)\operatorname{ctg}x=\underbrace{+0\cdot(-\infty)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}(1-\cos x)\operatorname{ctg}x=\underbrace{+0\cdot(+\infty)}=+\infty$$

②

$$y=\frac{2x+5}{x+3}\longrightarrow\quad y'=\frac{2(x+3)-(2x+5)\cdot 1}{(x+3)^2}=\frac{1}{(x+3)^2}$$

$$y'=\frac{1}{9}\Rightarrow\frac{1}{(x+3)^2}=\frac{1}{9}\ ;\quad x+3=\pm 3\ \begin{cases}x=0\\ x=-6\end{cases}$$

$$x=0\ \begin{cases}y=5/3\\ y'=\frac{1}{9}\end{cases}\qquad\boxed{y-\frac{5}{3}=\frac{1}{9}x}$$

$$x=-6\ \begin{cases}y=\frac{-12+5}{-6+3}=\frac{7}{3}\\ y'=\frac{1}{9}\end{cases}\qquad\boxed{y-\frac{7}{3}=\frac{1}{9}(x+6)}$$

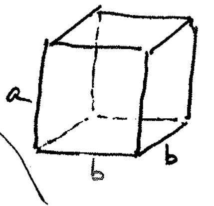
③

Maximizar: $V=b^2a$

Siendo: $96=2b^2+4ab$

$4ab=96-2b^2$

$a=\dfrac{96-2b^2}{4b}\ ;\quad a=\dfrac{48-b^2}{2b}$



$$V=b^2\,\frac{48-b^2}{2\cancel{b}}=\frac{1}{2}(48b-b^3)$$

$$\frac{dV}{db}=\frac{1}{2}(48-3b^2)$$

$$\frac{dV}{db}=0\Rightarrow 48-3b^2=0\ ;\quad b=\begin{cases}4\\ \cancel{-4}\end{cases}$$

	0		4		+∞
V'		+		−	
V		↗		↘	
			MAX		

Volumen Máximo para $\boxed{b=4\,m}\longrightarrow a=\dfrac{48-4^2}{2\cdot 4}=\dfrac{32}{8}=\boxed{4\,m}$

El prisma recto sería un cubo.

④ $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x\geq 3 \\ 2x+a & x<3 \end{cases}$

x^2-2x , $2x+a$ son expresiones polinómicas por lo que no tendrían problemas de discontinuidad. Únicamente pueda ajustar para $x=3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} f(x) = 2\cdot 3+a = 6+a \\ f(3) = 3^2-2\cdot 3 = 3 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = 3^2-2\cdot 3 = 3 \end{array}\right\} \longrightarrow 6+a=3 \Rightarrow \boxed{a=-3}$$ para que f sea continua en $x=3$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x\geq 3 \\ 2x-3 & x<3 \end{cases} \longrightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & x>3 \\ 2 & x<3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} f'(x) = 2 \\ \lim_{x\to 3^+} f'(x) = 2\cdot 3-2 = 4 \end{array}\right| \Rightarrow$$ f no sería derivable en $x=3$. Tendría en ese punto, un punto anguloso.

⑤ $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-3}$

a) $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}-\{3\}$

$$f'(x)=\frac{(2x-5)(x-3)-(x^2-5x+7)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-6x-\cancel{5x}+15-x^2+\cancel{5x}-7}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}=0 \;;\; x^2-6x+8=0 \;;\; x=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{6\pm 2}{2}\begin{array}{l} \nearrow 4 \\ \searrow 2 \end{array}$$

		2		3		4	
f'	+		−		−		+
f	↗		↘		↘		↗
		MAX				MIN	

f es creciente en $(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$
f es decreciente en $(2,3)\cup(3,4)$
f tiene un máximo local en $x=2$
f tiene un mínimo local en $x=4$

$$f''(x)=\frac{(2x-6)(x-3)^{\cancel{2}}-(x^2-6x+8)\cdot 2\cancel{(x-3)}}{(x-3)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2x^2-6x-6x+18-2x^2+12x-16}{(x-3)^3} = \frac{2}{(x-3)^3}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{2}{(x-3)^3}=0 \;;\; 2=0$$ Absurdo. No tiene inflexiones

		3	
f'	−		+
f	convexa		cóncava

f es convexa en $(-\infty,3)$
f es cóncava en $(3,+\infty)$

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-5x+7}{x-3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x-5}{1} = \infty$ → No tiene asíntota horizontal, podría tenerla oblicua.

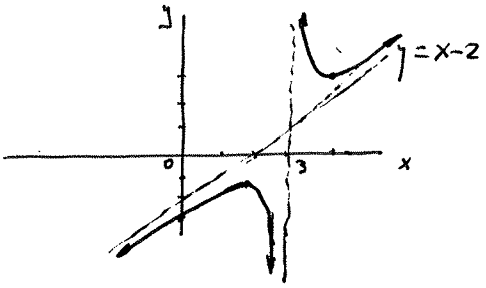
$$\begin{array}{r|l} x^2-5x+7 & x-3 \\ \underline{-x^2+3x} & \boxed{x-2} \\ -2x+7 & \\ \underline{2x-6} & \\ 1 & \end{array} \longrightarrow$$ Asíntota oblicua $y=x-2$.

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2-5x+7}{x-3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2-5x+7}{x-3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Asíntota vertical $x=3$

	x	y
	0	$-7/3$
MAX	2	-1
MIN	4	3



$y=x-2$

x	y
2	0
0	-2

⑥ $\left.\begin{array}{l} \cos x + \cos y = 1'2 \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1'4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow y = \arccos(1'2 - \cos x) \\ \longrightarrow y = \operatorname{arcsen}(1'4 - \operatorname{sen} x) \end{array}$

Representando ambas funciones con la calculadora gráfica, para $x \in (0,\pi)$ $y \in (0,\pi)$ buscamos los puntos intersección:

MODELO 9

① Como $f'(-1)=0$, $f'(-1^-)<0$, $f'(-1^+)>0$ $\Rightarrow$

	-1	
f'	$-$	$+$
f	↘	↗
	MIN	

f tendrá un mínimo local en $x=-1$

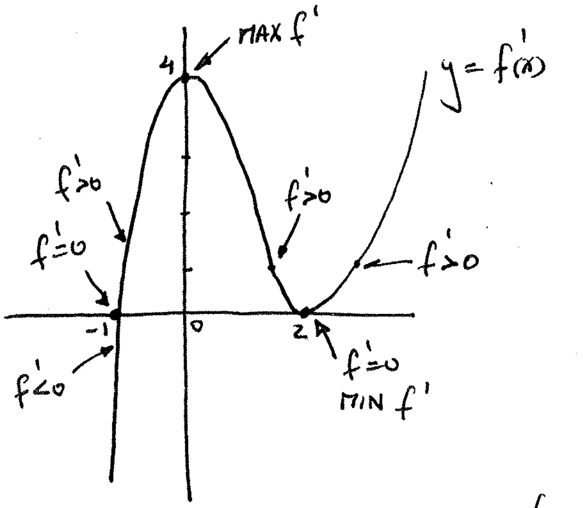
Como: $f'(2)=0$, $f'(2^-)>0$, $f'(2^+)>0$ $\Rightarrow$

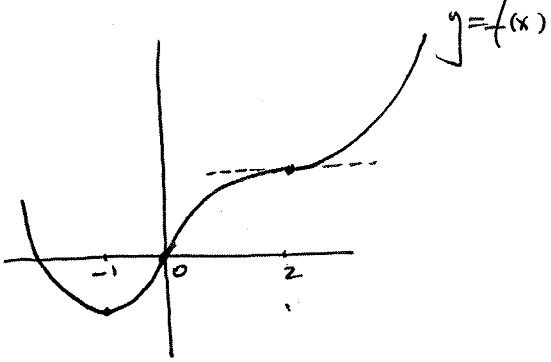
	2	
f'	$+$	$+$
	↗	↗

f <u>no</u> tendrá ni máximo ni mínimo local en $x=2$. Tendrá un punto de inflexión con tangente horizontal.

Como f' tiene un máximo local en $x=0$, su derivada será nula:

$(f')'(0)=0 \longrightarrow f''(0)=0$ por lo que f tendrá un punto de inflexión en $x=0$





②

$$y=\frac{K}{x}+\ln x^2 \longrightarrow y'=-\frac{K}{x^2}+\frac{1}{x^2}\cdot 2x=-\frac{K}{x^2}+\frac{2}{x}$$

$x=2 \rightarrow y=\frac{K}{2}+\ln 4$

$\quad\ \ \rightarrow y'=-\frac{K}{4}+1$

$3x+2y=b \longrightarrow y=\frac{b-3x}{2} \Rightarrow m=-\frac{3}{2}$

$-\frac{K}{4}+1=-\frac{3}{2}$

$-K+4=-6$

$\boxed{K=10}$

La recta tangente será:

$x=2 \rightarrow y=\frac{10}{2}+\ln 4=5+\ln 4$

$\quad\ \ \rightarrow y'=-\frac{3}{2}$

$y-(5+\ln 4)=-\frac{3}{2}(x-2)$

$2y-10-2\ln 4=-3x+6$

$3x+2y=16+2\ln 4$

$\boxed{b=16+2\ln 4}$

③

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2} = 1^{+\infty} = e^{\lim_{x\to 0}\ln(\cos 2x)^{3/x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^2}\ln\cos 2x} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}} = e^{\frac{0}{0}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}\cdot(-\sin 2x)\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}x}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\sin 2x}{x\cos 2x}} = e^{\frac{0}{0}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\cos 2x\cdot 2}{\cos 2x + x\cdot(-\sin 2x)\cdot 2}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos 2x}{\cos 2x - 2x\sin 2x}} = e^{\frac{-2}{1-0}} = \boxed{e^{-2}}$$

④

$$y = x \arcsin x$$

$$y' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2} - x\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2+1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2-x^2}{(1-x^2)^{3/2}} \quad ✓$$

⑤

$$y = \ln(x^2+1)$$

$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 1 \Rightarrow \ln(x^2+1)$ está definido para Todo $\mathbb{R}$.

$\text{dom} f = \mathbb{R}$

$$y' = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$y'' = \frac{2(x^2+1) - 2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$y''=0 \Rightarrow \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \; ; \; 2-2x^2=0 \; ; \; x=\pm 1$$

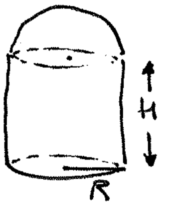
		-1		1	
y''	−		+		−
y	Convexa		Cóncav.		Convexa
		INF		INF	

Convexa en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

Cóncava en $(-1,1)$

Inflexiones en $x=1$, $x=-1$.

⑥



$$V = \pi R^2 H + \frac{1}{2}\,\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^2 H + \frac{2}{3}\pi R^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi\cdot 2R\frac{dR}{dt}H + \pi R^2\frac{dH}{dt} + \frac{2}{\cancel{3}}\pi\cdot\cancel{3}R^2\frac{dR}{dt}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dR}{dt}=2\\ \frac{dV}{dt}=204\pi\end{array}\right| \rightarrow 204\cancel{\pi} = 2\cancel{\pi}RH\cdot 2 + \cancel{\pi}R^2\frac{dH}{dt} + 2\cancel{\pi}R^2\cdot 2 \; ;$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{204-2RH-2R^2}{R^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}R=3\\ V=36\pi\end{array}\right| \rightarrow 36\cancel{\pi} = \cancel{\pi}\cdot 9\cdot H + \frac{2}{3}\cancel{\pi}\cdot 27 \; ; \quad H = \frac{36-18}{9} = 2$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{204-2\cdot 3\cdot 2-2\cdot 3^2}{3^2} = \boxed{15'\overset{\frown}{3}\text{ cm/min}}$$

MODELO 10

①

a) $\lim_{x\to 1} \frac{1-\cos(x-1)}{(\ln x)^2} = \frac{1-1}{0^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \frac{+\sin(x-1)}{2\ln x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x\sin(x-1)}{2\ln x} = \frac{0}{0} =$

$= \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)+x\cos(x-1)}{\frac{2}{x}} = \frac{0+1\cdot 1}{2/1} = \boxed{\frac{1}{2}}$

b) $\lim_{x\to 0} (x^4+e^x)^{1/x} = (0+1)^{1/0} = 1^\infty = e^{\lim_{x\to 0} \ln (x^4+e^x)^{1/x}} =$

$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(x^4+e^x)} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^4+e^x)}{x}} = e^{\frac{0}{0}} =$

$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^4+e^x}\cdot(4x^3+e^x)}{1}} = e^1 = \boxed{e}$

②

$xy^2+x^2y=2$

$y^2+x\cdot 2yy'+2xy+x^2y'=0$; $y' = \frac{-y^2-2xy}{2xy+x^2}$

$P(1,1) \longrightarrow y' = \frac{-1-2}{2+1} = -1$

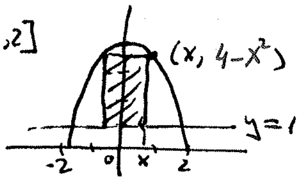
Recta Tangente : $y-1=-1(x-1)$; $\boxed{y=2-x}$

Recta Normal : $y-1=\frac{-1}{-1}(x-1)$; $\boxed{y=x}$

③

Rectángulo: Base $=2x$ | $x\in[0,2]$

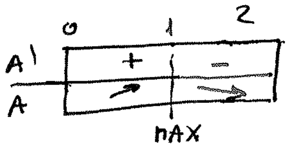
Altura $=4-x^2-1 = 3-x^2$



Area $= 2x(3-x^2) = 6x-2x^3$

$\frac{dA}{dx} = 6-6x^2$

$\frac{dA}{dx}=0 \longrightarrow 6-6x^2=0$; $x=\begin{cases}1\\-1\end{cases}$



Area Máxima para $x=1$

Base $=2\cdot 1= 2$

Altura $=3-1^2=2$

En realidad es un cuadrado.

④ $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-3ax-6}{x-3} & \text{Si } x<3\\[2mm] x^2-1 & \text{Si } x\geq 3\end{cases}$$

f está definida para todos los valores de x, pareciera que el primer trozo no esté definido en x=3 - por anularse el denominador - pero x=3 pertenece en realidad al 2º trozo.

El primer trozo es continuo en $(-\infty,3)$ por tener expresión racional y no anularse el denominador. El segundo trozo es continuo en $(3,+\infty)$ por tener expresión polinómica. Únicamente quedaría estudiar la continuidad en x=3:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3^2-1 = 9-1 = 8$$

$$f(3) = 3^2-1 = 9-1 = 8$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{2x^2-3ax-6}{x-3} = \frac{18-9a-6}{0^-} = \frac{12-9a}{0^-}$$

- Si $12-9a\neq 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \infty \Rightarrow$ f no sería continua en $x=3$.
- Si $12-9a=0 \longrightarrow a=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$, f <u>podría</u> ser continua:

$$a=4/3:\ \lim_{x\to 3^-}\frac{2x^2-3\cdot\frac{4}{3}x-6}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{2x^2-4x-6}{x-3} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 3}\frac{4x-4}{1} =$$

$$= 4\cdot 3-4 = 8.$$

Al coincidir el punto en x=3 con los dos límites laterales, f será continua en $x=3 \Rightarrow \boxed{a=4/3}$

⑤ $$f(x)=\frac{x}{x^2-4}$$

$\text{dom} f = \mathbb{R}-\{\pm 2\}$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x^2-4} = \frac{-\infty}{+\infty} = \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{2x} = 0^-$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x^2-4} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{2x} = 0^+$$

Asíntota Horizontal $y=0$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-}\frac{x}{x^2-4} = \frac{-2}{4^+-4} = \frac{-2}{+0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+}\frac{x}{x^2-4} = \frac{-2}{4^--4} = \frac{-2}{-0} = +\infty$$

Asíntota Vertical $x=-2$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4} = \frac{2}{4^- -4} = \frac{2}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2-4} = \frac{2}{4^+ -4} = \frac{2}{+0} = +\infty$$

Asíntota vertical $x=2$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-4) - x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}=0$; $-x^2-4=0$; $x^2=-4$ Absurdo. No tiene extremos locales.

		-2		2	
f'	$-$		$-$		$-$
f	↘		↘		↘

f es decreciente en todo su dominio.

$$f''(x) = \frac{-2x\cdot(x^2-4)^{\cancel{2}} - (-x^2-4)\cdot 2(\cancel{x^2-4})\cdot 2x}{(x^2-4)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-2x^3+8x+4x^3+16x}{(x^2-4)^3} = \frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3}$$

$f''(x)=0 \Rightarrow 2x^3+24x=0$; $2x(x^2+24)=0$ $\rightarrow$ $\boxed{x=0}$; $\rightarrow$ $x^2+24=0$ Absurdo

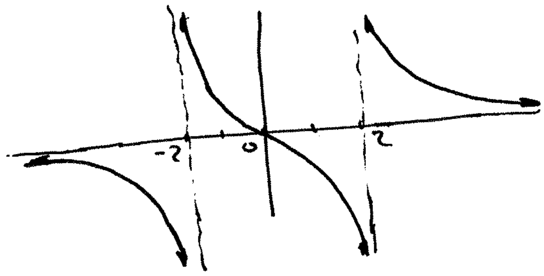
		-2		0		2	
f''	$-$		$+$		$-$		$+$
f	Conv.		Conc.		Conv.		Cóncava
				INF			

f es convexa en $(-\infty,-2) \cup (0,2)$

f es cóncava en $(-2,0) \cup (2,+\infty)$

f tiene un punto de inflexión en $x=0$

x	y
0	0



⑥ $V=\frac{4}{3}\pi R^3+\pi R^2 H$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{\cancel{3}}\pi\cdot\cancel{3}R^2\frac{dR}{dt} + \pi\cdot 2R\frac{dR}{dt}\cdot H + \pi R^2\frac{dH}{dt}$$

$\frac{dR}{dt}=2$

$\frac{dV}{dt}=204\pi$

$$204\cancel{\pi} = 4\cancel{\pi}R^2\cdot 2 + 2\cancel{\pi}RH\cdot 2 + \cancel{\pi}R^2\frac{dH}{dt} \rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{204-8R^2-4RH}{R^2}$$

$R=3$

$V=81\pi$

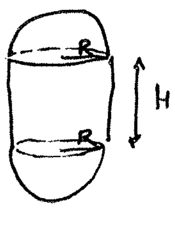
$$81\cancel{\pi} = \frac{4}{3}\cancel{\pi}\cdot 3^3+\cancel{\pi}\cdot 3^2 H \rightarrow H = \frac{81-\frac{4}{3}\cdot 27}{9} = 5 \text{ cm}$$

$R=3$

$H=5$

$$\rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{204-8\cdot 3^2-4\cdot 3\cdot 5}{3^2} = \boxed{18 \text{ cm/min}}$$

El sólido podría ser éste:



MODELO 11

① a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} = \frac{1-1-0}{0-0} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{1+1-2}{1-1} = \frac{0}{0} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{+\operatorname{sen} x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = \boxed{2}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \infty \cdot 0 = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x/2)}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\cos(x/2)}{1} = \boxed{\frac{1}{2}}$

② $f(x) = \frac{2x+1}{x-2} \longrightarrow f'(x) = \frac{2(x-2) - (2x+1)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-2)^2}$

a) $x = 3 \rightarrow y = \frac{2\cdot 3+1}{3-2} = 7$

$\rightarrow y' = \frac{-5}{(3-2)^2} = -5$

Recta Tangente: $y - 7 = -5(x-3)$

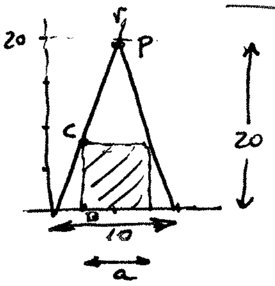
$\boxed{y = 22 - 5x}$

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x-2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1} = 2 \longrightarrow$ A. Horizontal $y = 2$

$\left.\begin{array}{l} y = 22 - 5x \\ y = 2 \end{array}\right\}$ $2 = 22 - 5x$; $5x = 20$; $x = 4$ $\boxed{P(4,2)}$.

③ a) $\left.\begin{array}{l} P(5,20) \\ O(0,0) \end{array}\right|$ $\overrightarrow{OP} = (5,20) \rightarrow m = \frac{20}{5} = 4$

r: $\boxed{y = 4x}$



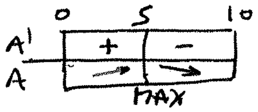
b) $\boxed{B\left(\frac{10-a}{2}, 0\right)}$

$x = \frac{10-a}{2} \longrightarrow y = 4\cdot\frac{10-a}{2} = 20 - 2a \longrightarrow \boxed{C\left(\frac{10-a}{2}, 20-2a\right)}$

c) $\text{Area} = a(20-2a) = 20a - 2a^2$ $\quad a \in [0,10]$

$\frac{dA}{da} = 20 - 4a$

$\frac{dA}{da} = 0 \Rightarrow 20 - 4a = 0$; $a = 5$



Máximo área para $\boxed{a = 5}$

④ $f(x)=\begin{cases}5x^2-2x-11 & \text{Si } x<1\\ -\frac{8}{x} & \text{Si } x\geq 1\end{cases}$ dom f = ℝ

- $5x^2-2x-11$ es polinómico por lo que f es continua y derivable en $(-\infty,1)$
- $-\frac{8}{x}$ anula su denominador en $x=0$, pero no está incluido en el segundo tramo. Por lo tanto f es continua y derivable en $(1,+\infty)$ por tener expresión racional sin anularse el denominador.
- Únicamente puede estudiar en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 5\cdot1^2-2\cdot1-11=-8\\ f(1)=-\frac{8}{1}=-8\\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\frac{8}{1}=-8\end{array}\right| \Rightarrow f \text{ es continua en } x=1$$

$$f'(x)=\begin{cases}10x-2 & \text{Si } x<1\\ +\frac{8}{x^2} & \text{Si } x>1\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} f'(x)=10\cdot1-2=8\\ \lim\limits_{x\to1^+} f'(x)=\frac{8}{1^2}=8\end{array}\right| \Rightarrow f \text{ es derivable en } x=1 \text{ con. } f'(1)=8.$$

Por lo tanto f es continua y derivable en ℝ.

⑤ $y=x^4e^{-x}$ dominio = ℝ

a) $y'=4x^3e^{-x}+x^4\cdot e^{-x}\cdot(-1)=x^3e^{-x}(4-x)=x^3(4-x)e^{-x}$

$$y'=0 \Rightarrow x^3(4-x)e^{-x}=0 \begin{cases}\to x^3=0;\ \boxed{x=0}\\ \to 4-x=0;\ \boxed{x=4}\\ \to e^{-x}=0 \text{ Absurdo}\end{cases}$$

		0		4	
y'	−		+		−
y	↘	MIN	↗	MAX	↘

La función es creciente en $(0,4)$

La función es decreciente en $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$

b) La función tiene un mínimo local en $x=0$

La función tiene un máximo local en $x=4$

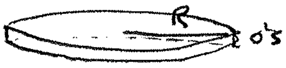
$$y'=(4x^3-x^4)e^{-x} \longrightarrow y''=(12x^2-4x^3)e^{-x}+(4x^3-x^4)e^{-x}\cdot(-1)=$$
$$=x^2(12-4x-4x+x^2)e^{-x}=x^2(x^2-8x+12)e^{-x}$$

$$y''=0 \Rightarrow x^2(x^2-8x+12)e^{-x}=0 \begin{cases}\to x^2=0:\ \boxed{x=0}\\ \to x^2-8x+12=0\\ \quad x=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2}=\frac{8\pm4}{2}= \nearrow \boxed{6},\ \searrow \boxed{2}\\ \to e^{-x}=0 \text{ Absurdo.}\end{cases}$$

		0		2		6	
y''	+		+		−		+
y	Cóncava		Cónc.	INF	Conv.	INF	Cóncava

La función tiene puntos de inflexión en $x=2$, $x=6$

⑥



$$V = \pi R^2 \cdot 0'5$$

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi R \frac{dR}{dt} \cdot 0'5 = \pi R \frac{d}{dt}$$

$$4 = \pi R \cdot \frac{dR}{dt} \longrightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{4}{\pi R}$$

$$R = 20 \longrightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{4}{\pi \cdot 4} = \boxed{\frac{1}{\pi} \ \mathrm{cm}\ s^{-1}}$$

Modelo 12

① $y = 3x - \ln x$
$y' = 3 - \frac{1}{x}$

$x = 1 \begin{cases} \to y = 3 - \ln 1 = 3 \\ \to y' = 3 - 1 = 2 \end{cases}$

Recta Tangente : $y - 3 = 2(x-1) \to \boxed{y = 2x+1}$

Recta Normal : $y - 3 = -\frac{1}{2}(x-1) \to \boxed{y = \frac{7-x}{2}}$

② $v = \frac{2-s}{s^2+1} \longrightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{-\frac{ds}{dt} - (2-s)\cdot 2s \cdot \frac{ds}{dt}}{(s^2+1)^2} = \frac{\frac{ds}{dt}(-1-2s+2s^2)}{(s^2+1)^2} = \frac{(2s^2-2s-1)\cdot v}{(s^2+1)^2}$

$s = 3 \begin{cases} \to v = \frac{2-3}{9+1} = -\frac{1}{10} \\ \to a = \frac{(2\cdot 9 - 6 - 1)\cdot \frac{-1}{10}}{(9+1)^2} = \boxed{\frac{-11}{1000}} \end{cases}$

③ $x^5 - 8x^2 = 0$
$x^2(x^3-8) = 0 \longrightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$

$$\begin{array}{c|c|c|c} & 0 & 2 & \\ \hline x^5-8x^2 & - & - & + \end{array}$$

$f(x) = \sqrt{x^5 - 8x^2}$ Dominio $f = \{0\} \cup [2, +\infty)$

$f'(x) = \boxed{\frac{5x^4 - 16x}{2\sqrt{x^5-8x^2}}}$ $\boxed{\text{Dominio } f' = (2, +\infty)}$

NOTA $f'(x)$ se puede simplificar, resultando $f'(x) = \frac{x(5x^3-16)}{2x\sqrt{x^3-8}} = \boxed{\frac{5x^3-16}{2\sqrt{x^3-8}}}$

sin embargo $f(x)$ no se puede simplificar, estaría mal $f(x) = x\sqrt{x^3-8}$

ya que se diferencia de la función original en el punto (aislado) $x = 0$

④ Es falso.
Por ejemplo:

$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{Si } x \neq 2 \\ x & \text{Si } x = 2 \end{cases}$ $f(2) = 3$ pero $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$.

⑤ $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{Tg} x}{x - \sin x} = \frac{0-0}{0-0} = \frac{0}{0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sec^2 x}{1 - \cos x} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\sec x \cdot \sec x \cdot \operatorname{Tg} x}{+\sin x} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\frac{1}{\cos^2 x}\cdot \frac{\cancel{\sin x}}{\cos x}}{\cancel{\sin x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-2}{\cos^3 x} = \frac{-2}{1} = \boxed{-2}$

⑥ $y = \frac{2x^3}{x^2+3x}$

$x^2 + 3x = 0$; $x(x+3) = 0$; $x = \begin{cases} 0 \\ -3 \end{cases} \Longrightarrow$ Dominio $= \mathbb{R} - \{0, -3\}$

$\lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{x^2+3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{6x^2}{2x+3} = \frac{0}{3} = 0 \longrightarrow$ No hay asíntota vertical en $x = 0$.

$\lim_{x\to -3} \frac{2x^3}{x^2+3x} = \frac{-54}{9-9} = \frac{-54}{0} = \infty \begin{cases} \lim_{x\to -3^-} \frac{2x^3}{x^2+3x} = \frac{-54}{+0} = -\infty \\ \lim_{x\to -3^+} \frac{2x^3}{x^2+3x} = \frac{-54}{-0} = +\infty \end{cases}$ $\boxed{\text{Asíntota Vertical } x = -3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^2+3x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2}{2x+3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{12x}{2} = \infty \Longrightarrow$$ No hay asintota Horizontal.

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{2x^3}{x^2+3x} : x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^3+3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2}{3x^2+6x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{12x}{6x+6} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{12}{6} = \boxed{2 = m}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{2x^3}{x^2+3x} - 2x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{2x^3} - \cancel{2x^3} - 6x^2}{x^2+3x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{-12x}{2x+3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{-12}{2} = \boxed{-6 = n}$$

$\boxed{\text{Asintota oblicua} \quad y = 2x-6}$

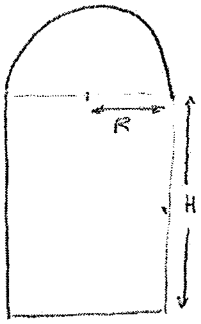
También:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 & x^2+3x \\ \hline -2x^3-6x^2 & 2x-6 \leftarrow \text{A. oblicua} \\ \quad -6x^2 & \\ \quad 6x^2+18x & \\ \qquad 18x & \end{array}$$

⑦

Perimetro = 6 $\longrightarrow \frac{2\pi R}{\cancel{2}} + 2H + 2R = 6 \longrightarrow \boxed{H = \frac{6-2R-\pi R}{2}}$

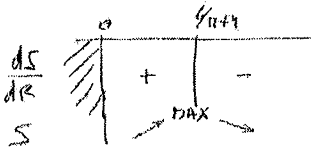
Superficie = $\frac{\pi R^2}{2} + 2RH$



$$S = \frac{\pi R^2}{2} + \cancel{2}R\,\frac{6-2R-\pi R}{\cancel{2}} = \frac{\pi R^2}{2} + 6R - 2R^2 - \pi R^2 =$$
$$= \frac{\pi R^2 + 12R - 4R^2 - 2\pi R^2}{2} = \frac{12R - 4R^2 - \pi R^2}{2}$$

$$\frac{dS}{dR} = \frac{12 - 8R - 2\pi R}{2} = 6 - 4R - \pi R = 6 - R(\pi+4)$$

$$\frac{dS}{dR} = 0 \Longrightarrow \boxed{R = \frac{6}{\pi+4}}$$



Superficie máxima para $R = \boxed{\frac{6}{\pi+4}\ m} \longrightarrow H = \dfrac{6 - \frac{12}{\pi+4} - \frac{6\pi}{\pi+4}}{2} = \dfrac{\cancel{6\pi} + 24 - 12 - \cancel{6\pi}}{2(\pi+4)} = \boxed{\frac{6}{\pi+4}\ m}$

⑧ $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le -1 \\ 1-x^2 & \text{si } -1 < x \le 2 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ Dominio $= (-\infty, -1] \cup (-1, 2] \cup (2,3) \cup (3, +\infty) = \mathbb{R} - \{3\}$

$x+1$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$ por ser polinómica

$1-x^2$,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,,

$\frac{1}{x-3}$,, ,, ,, ,, en $\mathbb{R}-\{3\}$ por ser racional

Veamos la continuidad en $x=-1$, $x=2$, $x=3$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} f(x) = -1+1 = 0 \\ f(-1) = -1+1 = 0 \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = 1-(-1)^2 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) \text{ es continua en } x=-1$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} f(x) &= 1-4=-3\\ f(2) &= 1-4=-3\\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \frac{1}{2-3}=-1\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ f(x) tiene una discontinuidad de salto finito en $x=2$

$\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{1}{3-3} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow$ f(x) tiene una discontinuidad asintótica en $x=3$

$\boxed{f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R}-\{2,3\}}$

f(x) no puede ser derivable en $x=2$, ni en $x=3$, por no ser continua

Veamos la derivabilidad en $x=-1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x<-1 \\ -2x & \text{si } -1<x<2 \\ \frac{-1}{(x-3)^2} & \text{si } x>2 \end{cases} \qquad \left.\begin{aligned} f'(-1^-) &= 1\\ f'(-1^+) &= 2\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ f(x) no es derivable en $x=-1$, tiene un punto anguloso.

$\boxed{f(x) \text{ es derivable en } \mathbb{R}-\{-1,2,3\}}$

⑨ $f(x) = x^3 - \frac{4}{3}|x| = \begin{cases} x^3 - \frac{4}{3}x & \text{si } x\geq 0 \\ x^3 + \frac{4}{3}x & \text{si } x<0 \end{cases}$ Dominio $= \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - \frac{4}{3} & \text{si } x>0 \\ 3x^2 + \frac{4}{3} & \text{si } x<0 \end{cases} \qquad \left.\begin{aligned} f'(0^+) &= -\frac{4}{3}\\ f'(0^-) &= \frac{4}{3}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ f(x) no es derivable en $x=0$, tiene un punto anguloso

$f'(x)=0 \Rightarrow$

- $3x^2 - \frac{4}{3} = 0$ (para los $x>0$) $\longrightarrow x^2 = \frac{4}{9}$; $x = \frac{2}{3}$, $\cancel{-\frac{2}{3}}$
- $3x^2 + \frac{4}{3} = 0$ (para los $x<0$) $\longrightarrow x^2 = -\frac{4}{9}$ ✗

		0		2/3	
f'(x)	+		−		+
f(x)	↗		↘		↗

f(x) es creciente en $(-\infty,0) \cup (\frac{2}{3},+\infty)$
f(x) es decreciente en $(0,2/3)$
f(x) tiene un máximo relativo en $x=0$ (que es punto anguloso)
f(x) " " mínimo " en $x=2/3$

⑩ $f(x) = x^3 - ax + b$; $f'(x) = 3x^2 - a$

f impar $\Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow (-x)^3 - a(-x) + b = -(x^3 - ax + b) \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow -x^3 + ax + b = -x^3 + ax - b \Rightarrow 2b=0 \Rightarrow \boxed{b=0}$

f tiene extremos relativos en $x=\pm 1 \Rightarrow f'(\pm 1) = 0 \longrightarrow 3-a=0$; $\boxed{a=3}$

$\boxed{f(x) = x^3 - 3x}$

MODELO 13

① $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{3x}{1-4x^2} & \text{si } -1 < x < 0 \\ x^2+3x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- El 1er y 3er trozo no tienen problemas de discontinuidad por tratarse de expresiones constante y polinómica respectivamente.

El 2º trozo no será continuo allá donde se anule el denominador:

$1-4x^2=0$; $4x^2=1$; $x^2=\frac{1}{4}$; $x=\begin{cases} -1/2 \\ \cancel{1/2} \end{cases}$ No pertenece al 2º trozo.

Por lo tanto: $\boxed{\text{dom} f = \mathbb{R} - \{-1/2\}}$

- Veamos la discontinuidad en $x=-1/2$:

$$\lim_{x \to -1/2} \frac{3x}{1-4x^2} = \frac{-3/2}{0} = \infty \longrightarrow \boxed{\text{Discontinuidad de salto infinito en } x=-1/2}$$

- Veamos ahora posibles discontinuidades en $x=-1$, $x=0$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1 \\ &f(-1) = 1 \\ &\lim_{x \to -1^+} f(x) = \frac{3\cdot(-1)}{1-4(-1)^2} = \frac{-3}{1-4} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{f \text{ es continua en } x=-1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{3\cdot 0}{1-4\cdot 0^2} = 0 \\ &f(0) = 0^2+3\cdot 0 = 0 \\ &\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^2+3\cdot 0 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{f \text{ es continua en } x=0}$$

② $f(x) = \frac{x}{1-e^x}$

$1-e^x=0$; $e^x=1$; $x=0$ $\boxed{\text{dom} f = \mathbb{R} - \{0\}}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1-e^x} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{-e^x} = \frac{1}{-1} = -1$$

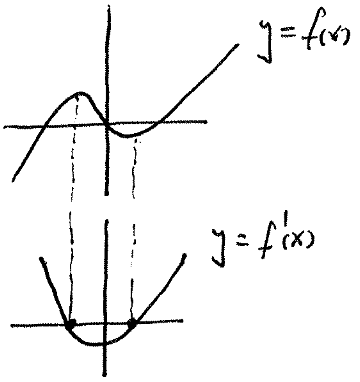
$\boxed{f \text{ tiene una discontinuidad evitable en } x=0}$

③ Es verdadera. La derivabilidad necesita necesariamente de la continuidad.

④ $y = \text{arctg} \frac{x}{1-x}$

$$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1\cdot(1-x) - x\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x}{\left[1+\frac{x^2}{(1-x)^2}\right]\cdot(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2+x^2} = \boxed{\frac{1}{2x^2-2x+1}}$$

⑤



⑥
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{tg x}=\infty^0=e^{\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{tg x}}=e^{\lim_{x\to 0^+} tg x\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim_{x\to 0^+}(-tg x\cdot\ln x)}=$$
$$=e^{-0\cdot\infty}=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/tg x}}=e^{\frac{-\infty}{+\infty}}=$$
$$=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{\frac{-1/\cos^2 x}{tg^2 x}}}=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/sen^2 x}}=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{-sen^2 x}{x}}=$$
$$=e^{\frac{0}{0}}=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{-2sen x\cdot\cos x}{1}}=e^0=\boxed{1}$$

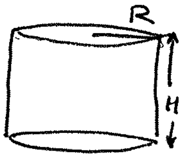
⑦
$$f(x)=x^2-2|x|+1=\begin{cases}x^2+2x+1 & si\ x<0\\ 1 & si\ x=0\\ x^2-2x+1 & si\ x\geq 0\end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+2h+\cancel{1}-\cancel{1}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+2h}{h}=\lim_{h\to 0^+}(h+2)=2$$
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2-2h+\cancel{1}-\cancel{1}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2-2h}{h}=\lim_{h\to 0^+}(h-2)=-2$$

No es derivable en $x=0$. Tiene un punto anguloso

⑧
Maximizar : $V=\pi R^2 H$
Siendo : $150=2\pi R^2+2\pi RH$

$$H=\frac{150-2\pi R^2}{2\pi R}$$



$$V=\cancel{\pi}R^{\cancel{2}}\,\frac{150-2\pi R^2}{2\cancel{\pi}\cancel{R}}=75R-\pi R^3$$

$$\frac{dV}{dR}=75-3\pi R^2$$

$$\frac{dV}{dR}=0\longrightarrow 75-3\pi R^2=0\ ;\ R=\frac{25}{\pi}$$

		25/π	
V'	+		−
V	↗		↘
		MAX	

Máximo volumen para $\boxed{R=\frac{25}{\pi}\ cm}\longrightarrow H=\frac{150-2\pi\left(\frac{25}{\pi}\right)^2}{2\cancel{\pi}\cdot\frac{25}{\cancel{\pi}}}=\frac{150-\frac{1250}{\pi}}{25}=$

$$=\boxed{6-\frac{50}{\pi}\ cm}$$

⑨ $x^2+y^2-xy+5y+2x=11$

$2x+2yy'-y-xy'+5y'+2=0$; $\boxed{y'=\frac{y-2x-2}{2y-x+5}}$

$\alpha=\pi/4 \Rightarrow m=tg\,\pi/4=1 \longrightarrow 1=\frac{y-2x-2}{2y-x+5}$; $2y-x+5=y-2x-2$;

$\boxed{y=-x-7}$

$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-xy+5y+2x=11 \\ y=-x-7 \end{array}\right\}$ $x^2+(-x-7)^2-x\cdot(-x-7)+5(-x-7)+2x=11$

$x^2+x^2-14x+49+x^2+7x-5x-35+2x-11=0$

$3x^2-10x+3=0$

$x=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{6}=\frac{10\pm 8}{6}=\begin{cases} 3 \longrightarrow y=-3-7=-10 \\ -1/3 \longrightarrow y=-\frac{1}{3}-7=-\frac{22}{3} \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} A(3,-10) \\ B(-1/3,-22/3) \end{array}\right|$ $\vec{AB}=\left(-\frac{1}{3}-3,-\frac{22}{3}+10\right)=\left(-\frac{10}{3},\frac{8}{3}\right)\longrightarrow m=\frac{8/3}{-10/3}=-\frac{8}{10}=-0'8$

$\boxed{y+10=-0'8(x-3)}$

⑩ $y=\frac{(x-3)^2}{x^2}$ dominio $=\mathbb{R}-\{0\}$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-}\frac{(x-3)^2}{x^2}=\frac{9}{+0}=+\infty \\ \lim_{x\to 0^+}\frac{(x-3)^2}{x^2}=\frac{9}{-0}=+\infty \end{array}\right|$ Asíntota Vertical $x=0$

$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+9}{x^2}=1 \longrightarrow$ Asíntota Horizontal $y=1$

$y'=\frac{2(x-3)\cdot x^{\cancel{2}}-(x-3)^2\cdot 2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}3}}=\frac{2\cancel{x^2}-6x-2\cancel{x^2}+12x-18}{x^3}=\frac{6x-18}{x^3}$

$y'=0 \Rightarrow \frac{6x-18}{x^3}=0$; $6x-18=0$; $\boxed{x=3}$

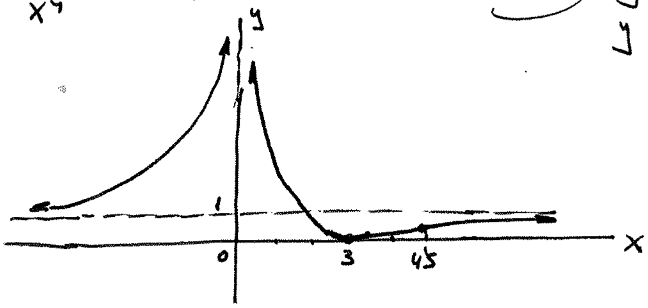
		0		3	
y'	+	⋮	−	|	+
y	↗	⋮	↘	|	↗
				MIN	

$y''=\frac{6\cdot x^{\cancel{3}}-(6x-18)\cdot 3x^{\cancel{2}}}{x^{\cancel{6}4}}=\frac{6x-18x+54}{x^4}=\frac{54-12x}{x^4}$

$y''=0 \Rightarrow \frac{54-12x}{x^4}=0$; $54-12x=0$; $\boxed{x=\frac{9}{2}}$

		0		9/2	
y''	+	|	+	|	−
y	Cónc.	|	Cóncava	|	Convexa
				INF	

x	y
3	0
9/2	1/9

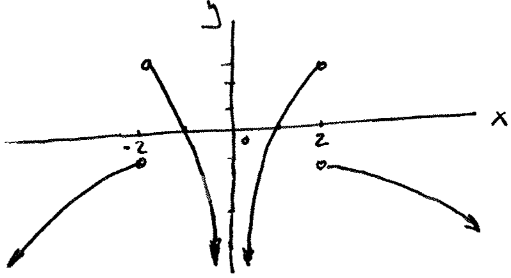


MODELO 14

①
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x - x}{x-\operatorname{arcsen}x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cancel{-2x}}{(1+x^2)^2}}{-\frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(\cancel{-2x})}{1-x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x^2)^2}}{\frac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{-(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)^2}=\frac{-1}{1}=\boxed{-1}$$

②



③
$$y=\frac{3-4x}{2x+1}$$

$x=\frac{3-4y}{2y+1}$; $2xy+x=3-4y$; $2xy+4y=3-x$; $y=\frac{3-x}{2x+4}$

$f(x)=\frac{3-4x}{2x+1}\longrightarrow \operatorname{dom} f=\mathbb{R}-\{-1/2\}$ $\quad$ $\operatorname{im} f=\mathbb{R}-\{-2\}$

$f^{-1}(x)=\frac{3-x}{2x+4}\longrightarrow \operatorname{dom} f^{-1}=\mathbb{R}-\{-2\}$ $\quad$ $\operatorname{im} f^{-1}=\mathbb{R}-\{-1/2\}$

④
$$y=\frac{(4-x^2)\sqrt[3]{x+2}}{x-2}\ ;\quad \ln y=\ln(4-x^2)+\frac{1}{3}\ln(x+2)-\ln(x-2)$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{-2x}{4-x^2}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}=\frac{2x}{x^2-4}+\frac{1}{3(x+2)}-\frac{1}{x-2}=$$

$$=\frac{6x+x-2-3(x+2)}{3(x^2-4)}=\frac{4x-8}{3(x^2-4)}=\frac{4(x-2)}{3(x^2-4)}$$

$$y'=\frac{4(x-2)}{3(x^2-4)}\cdot y=\frac{4(x\cancel{-2})}{3(x^2-4)}\,\frac{(4-x^2)\sqrt[3]{x+2}}{x\cancel{-2}}=$$

$$=\frac{-4\cancel{(x^2-4)}\sqrt[3]{x+2}}{3\cancel{(x^2-4)}}=\boxed{-\frac{4}{3}\sqrt[3]{x+2}}$$

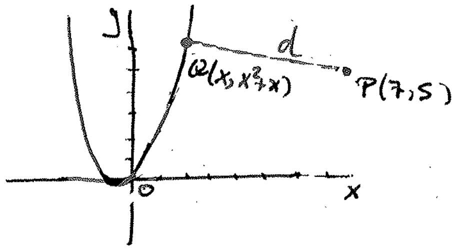
⑤
$f'(2)=5$ significa de f es derivable en $x=2$, por lo que, necesariamente $f(x)$ debe ser continua en $x=2$. Lo que no es obligatorio es que el punto sea el $P(2,5)$, ya que 5 es el valor de la derivada no el valor de la función. Por lo tanto, FALSA.

⑥
$y=6\ln x-2x\longrightarrow y'=\frac{6}{x}-2$

$\alpha=135^\circ\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=-1$; $-1=\frac{6}{x}-2$; $x=6\longrightarrow y=6\ln 6-12$

El punto es $\boxed{P(6,\ 6\ln 6-12)}$

⑦



$P(7,5)$
$Q(x,x^2+x)$ | $\vec{PQ}=(x-7,x^2+x-5)$;

$$d=\sqrt{(x-7)^2+(x^2+x-5)^2}$$

$$d'=\frac{\cancel{2}(x-7)+\cancel{2}(x^2+x-5)(2x+1)}{\cancel{2}\sqrt{(x-7)^2+(x^2+x-5)^2}}=\frac{x-7+2x^3+x^2+2x^2+x-10x-5}{\sqrt{(x-7)^2+(x^2+x-5)^2}}=$$

$$=\frac{2x^3+3x^2-8x-12}{\sqrt{(x-7)^2+(x^2+x-5)^2}}$$

$$d'=0\Rightarrow 2x^3+3x^2-8x-12=0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & -8 & -12\\ 2 & & 4 & 14 & 12\\ \hline & 2 & 7 & 6 & \boxed{0}\end{array}$$

$$2x^2+7x+6=0$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{4}=\frac{-7\pm1}{4}\begin{array}{l}\nearrow -3/2\\ \searrow -2\end{array}$$

		-2		-3/2		2	
d'	−		+		−		+
d	↘		↗		↘		↗
		MIN		MAX		MIN	

La función distancia tiene dos mínimos locales (y un máximo local). Con el perfil:  quedaría comprobar cuál es el mínimo absoluto. Comparamos:

$x=-2 \longrightarrow d=\sqrt{(-2-7)^2+((-2)^2+(-2)-5)^2}=3\sqrt{10}$

$x=2 \longrightarrow d=\sqrt{(2-7)^2+(2^2+2-5)^2}=\boxed{\sqrt{26}}$

El punto más cercano es: $Q(2,2^2+2)=\boxed{Q(2,6)}$

⑧ $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$

$\ln x=0\Rightarrow x=1$ dominio $=(0,+\infty)-\{1\}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{\ln x}=\frac{0}{-\infty}=0^-$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2}{\ln x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2}{\ln x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Asíntota vertical $x=1$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\ln x}=\frac{+\infty}{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1/x}=\lim_{x\to+\infty}2x^2=+\infty$$ → No tiene asíntota horizontal. Podría tenerla oblicua.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2/\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=\frac{+\infty}{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1/x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$ → No tiene asíntota oblicua

$$y' = \frac{2x\ln x - x^2\cdot 1/x}{\ln^2 x} = \frac{2x\ln x - x}{\ln^2 x}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{2x\ln x - x}{\ln^2 x} = 0 \;;\; 2x\ln x - x = 0 \;;\; x(2\ln x - 1) = 0 \begin{cases} \to x \cancel{= 0} \text{ No pertenece al dominio} \\ \to 2\ln x = 1 \;;\; \boxed{x = e^{1/2}} \end{cases}$$

	0		1		$e^{1/2}$	
y'		−		−		+
y		↘		↘	MIN	↗

$$y'' = \frac{(2\ln x + 2x\frac{1}{x} - 1)\ln^{\cancel{2}} x - (2x\ln x - x)\cdot 2\cancel{\ln x}\,\frac{1}{x}}{\ln^{\cancel{4}\,3} x} = \frac{2\ln^2 x + 2\ln x - \ln x - 4\ln x + 2}{\ln^3 x} =$$

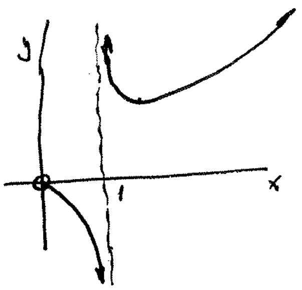
$$= \frac{2\ln^2 x - 3\ln x + 2}{\ln^3 x}$$

$$y'' = 0 \rightarrow \frac{2\ln^2 x - 3\ln x + 2}{\ln^3 x} = 0 \;;\; 2\ln^2 x - 3\ln x + 2 = 0$$

$$\ln x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16}}{4} \quad \underline{\text{Absurdo}}$$

	0		1	
y''		−		+
y		convexa		cóncava

x	y
$e^{1/2}$	2e



⑨ $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ dom f = ℝ

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4x(x^2+1)^{\cancel{2}} - (2-2x^2)\cdot 2\cancel{(x^2+1)}\cdot 2x}{(x^2+1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-4x^3 - 4x - 8x + 16x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{12x^3 - 12x}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{12x^3 - 12x}{(x^2+1)^3} = 0 \;;\; 12x^3 - 12x = 0 \;;\; 12x(x^2 - 1) = 0 \;;\; x = \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \end{cases}$$

		−1		0		1	
f''	−		+		−		+
f	Conv.		Conc		Conv		Conc
		INF		INF		INF	

f Tiene inflexiones en x=0, x=1, x=−1

⑩ $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ K & \text{si } x = 0 \end{cases}$ dom f = ℝ

f está definida y es continua en cualquier $x \neq 0$, por ser diferencia y cociente de funciones continuas y no anularse su denominador.

Veamos en x=0:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1 \\ f(0) = K \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{K = 1} \text{ para que f sea continua en } x = 0$$

$$f'(x) = \frac{e^x\cdot x - (e^x - 1)\cdot 1}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{0-1+1}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{e^x} + xe^x - \cancel{e^x}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}e^x}{2\cancel{x}} = \boxed{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{f'(0) = \frac{1}{2}}$$