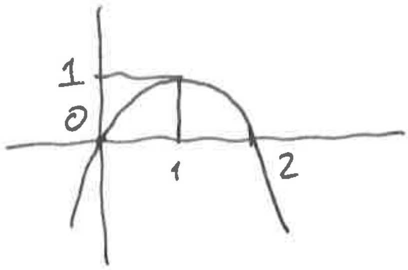
# P3 Mayo 2021

(1º) $f_n(x) = x^n(a-x)^n \qquad a \in \mathbb{R}^+ \; ; \; n \in \mathbb{Z}^+$

(a) $a = 2$

$f_1(x) = x \cdot (2-x)$




Es una parábola y corta en $(0,0)$ y $(0,2)$

El máximo está en el punto medio de las raíces porque es una parábola y es simétrica.

$x = 1 \qquad f_1(1) = 1 \cdot (2-1) = 1$

(b) $f_n(x) = x^n(2-x)^n \; ; \quad n \in \mathbb{Z}^+, \; n > 1$

Usamos la calculadora gráfica.

(c) $\cancel{f_n'(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot (2-x)^n + n \cdot (2-x)^{n-1} \cdot (-1) \cdot x^n}$

$f_n(x) = x^n(a-x)^n \qquad a \in \mathbb{R}^+ \; ; \; n > 1$

$$f_n'(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot (a-x)^n + x^n \cdot n \cdot (a-x)^{n-1} \cdot (-1)$$

$$= n\left[x^{n-1} \cdot (a-x)^n - x^n \cdot (a-x)^{n-1}\right] =$$

$$= n \cdot x^{n-1}\left[(a-x)^n - x \cdot (a-x)^{n-1}\right] =$$

$$= n \cdot x^{n-1} \cdot (a-x)^{n-1} \cdot \left[(a-x) - x\right] = n \cdot x^{n-1} \cdot (a-x)^{n-1} \cdot (a-2x)$$

(d) Las tres soluciones de $f_n'(x) = 0$ son:

$\boxed{x = 0}$ ; $\boxed{x = a}$ y $a - 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{a}{2}}$

c) Por los gráficos de la calculadora vemos que es siempre n par o impar un máximo relativo.

$f_n'\left(\frac{a}{2}\right)=0 \implies$ es un punto crítico

$f_n''(x) = n\cdot$

$f_n'(x) = n \cdot f_{n-1}(x) \cdot (a-2x) = n\cdot(a-2x)\cdot f_{n-1}(x)$

$f_n''(x) = n\cdot\left[-2\cdot f_{n-1}(x) + (a-2x)\cdot f_{n-1}'(x)\right]$

$f_n''(x) = n\cdot\left[-2\cdot f_{n-1}\left(\frac{a}{2}\right) + 0\cdot f_{n-1}'(a/2)\right] =$

$= n\cdot -2\cdot x^{n-1}\cdot\left(a-\frac{a}{2}\right)^{n-1} = -2n\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} < 0$

Por tanto es un máximo relativo

$f_n(x)$ Es un polinomio, los únicos puntos críticos son $x=0$, $x=\frac{a}{2}$ y $x=a$ y

$f_n(0)=0$ y $f_n(a)=0$ $\Big\}\implies$ por tanto $f_n\left(\frac{a}{2}\right)>0$

$f_n\left(\frac{a}{2}\right)$ es un max

(f) $\cancel{f_n'\left(\frac{a}{4}\right) = n\cdot f_{n-1}\left(\frac{a}{4}\right)\cdot\left(a-2\cdot\frac{a}{4}\right) = n\cdot\frac{a}{2}\cdot f_{n-1}\left(\frac{a}{4}\right)}$

$\cancel{= \frac{na}{2}\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^{n-1}\cdot\left(2-\frac{a}{4}\right)^{n-1}} = \frac{n\cdot a}{2}\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{8-a}{4}\right)^{n-1}$

$\vee$ $\vee$

0 0

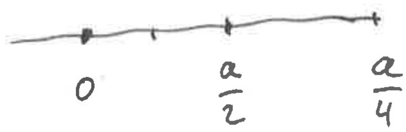
(f) Tenemos: $f_n'(0) = 0$

$f_n'\left(\frac{a}{2}\right) = 0$ únicas soluciones

$f_n'(a) = 0$ de la ecuación $f_n'(x) = 0$.

R.A. Supongamos $f_n'\left(\frac{a}{4}\right) < 0$

Si $f_n'\left(\frac{a}{4}\right) < 0$ $f_n'(x)$ es decreciente en un entorno de $\left(\frac{a}{4}\right)$, como $\frac{a}{2}$ es un máximo de $f_n(x)$ debe haber




en un entorno de $\frac{a}{2}$ valores en los que $f_n'(x) > 0$

Como es un polinomio, continua y derivable en $(0, a)$ por el th. de Bolzano $f_n'(x) = 0$ en un valor ext. en el intervalo $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{2}\right)$ que es imposible porque los únicos puntos críticos son $0$, $\frac{a}{2}$ y $a$.

(g) $O(0,0)$ $\quad y = x^n \cdot (a-x)^n - k \quad n \in \mathbb{Z}^+,\ a \in \mathbb{R}^+,\ k \in \mathbb{R}$

$$f_n'(-1) = n \cdot (-1)^{n-1} \left(a - 2\cdot(-1)\right) \cdot (a+1)^{n-1} =$$

$$= \underset{\vee \atop 0}{n} \cdot (-1)^{n-1} \underset{\vee \atop 0}{(a+2)} \cdot \underset{\vee \atop 0}{(a+1)^{n-1}}$$

$$f_n'(-1) = \begin{cases} \text{positivo} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \text{negativo} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

(g) (i) Si $n$ es par:

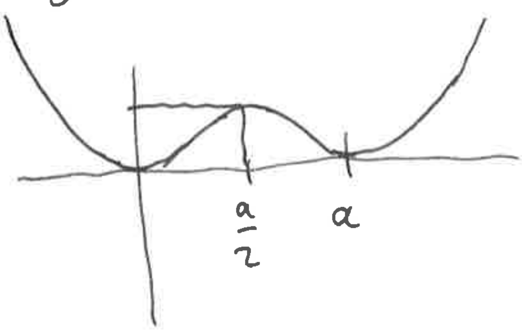
$$\left.\begin{array}{l} f_n'(-1) < 0 \\ f_n'\left(\frac{a}{4}\right) > 0 \\ f_n'(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow O(0,0) \text{ es un mínimo relativo (local)}$$

(ii) Si $n$ es impar:

$$\left.\begin{array}{l} f_n'(-1) > 0 \\ f_n'\left(\frac{a}{4}\right) > 0 \\ f_n'(0) = 0 \end{array}\right\} \; O(0,0) \text{ es un punto de inflexión.}$$

(h) $y = x^n \cdot (a-x)^n - k$ ; $x^n \cdot (a-x)^n = k$

Si $n$ es par:

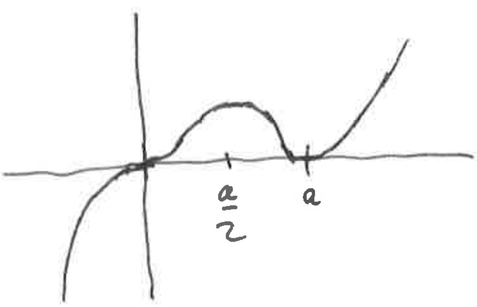



para q. tenga 4 soluciones hay q. bajar la gráfica como mucho $f\left(\frac{a}{2}\right)$

$$f(a/2) = \left(\frac{a}{2}\right)^n \cdot \left(a - \frac{a}{2}\right)^n = \left(\frac{a}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^n = \left(\frac{a}{2}\right)^{2n}$$

$$k \in \left(0, \left(\frac{a}{2}\right)^{2n}\right)$$

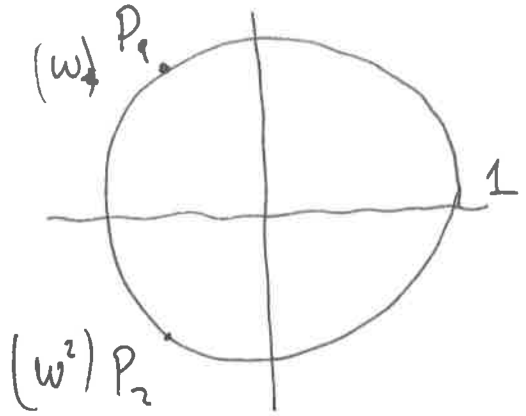
Si $n$ es impar:




No cortaría nunca la gráfica cuatro veces al eje X por mucho que la desplazáramos verticalmente.

2º $z^n = 1$ ; $n \in \mathbb{Z}$ ; $n \geq 2$

$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ ; con $\omega = e^{2\pi i/n}$ raíces de la unidad




(a) $(\omega - 1)\cdot(\omega^2 + \omega + 1) = \omega^3 - 1$

Por Ruffini para cualquier $z \in \mathbb{C}$ divido el polinomio $z^3 - 1$ por $z - 1$ teniendo:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Factorizando $z^3 - 1 = (z-1)\cdot(z^2 + z + 1)$

Se cumple en particular para $\omega$.

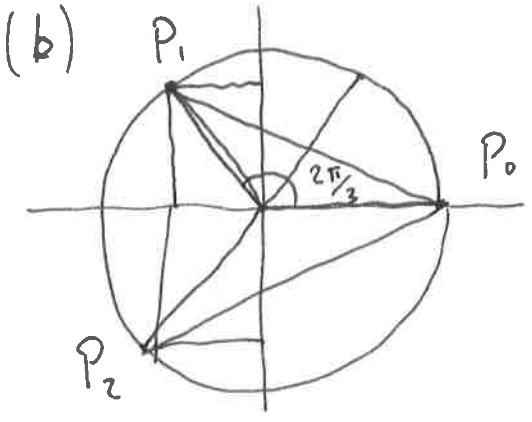
(b) Como $\omega$ es raíz de $z^3 - 1$ se cumple $\omega^3 - 1 = 0$

Por tanto $0 = \omega^3 - 1 = (\omega - 1)\cdot(\omega^2 + \omega + 1)$ $\begin{cases} \omega - 1 \neq 0 \\ \omega^2 + \omega + 1 = 0 \end{cases}$ por

$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} \neq 1$

Se cumple $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

(b)




$P_0 P_1$ longitud de $[P_0 P_1]$

$P_0 P_1 \cdot P_0 \cdot P_2 = 3$

$P_0 (1, 0)$; $P_1 = \left(\cos \frac{2\pi}{3}, \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$P_2 \left(\cos \frac{4\pi}{3}, \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}\right)$

2º

(b) $P_0P_1 = \sqrt{\left(1-\cos\frac{2\pi}{3}\right)^2 + \left(-\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)^2} =$

$P_0P_2 = \sqrt{\left(1-\cos\frac{4\pi}{3}\right)^2 + \left(-\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)^2} =$

$P_1\left(\cos\frac{2\pi}{3}, \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \left(-\cos\frac{\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$P_2\left(\cos\frac{4\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right) = \left(-\cos\frac{\pi}{3}, -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

$P_0P_1 = \sqrt{\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$

$P_0P_2 = \sqrt{\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2\right.} = \sqrt{3}$

$P_0P_1 \cdot P_0P_2 = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3.$ c.q.d.

n=4 $z^4=1$; $1, \omega, \omega^2, \omega^3$.

(c) Deduzca q. $\omega^3+\omega^2+\omega+1 = 0$.

Por Ruffini $z^4-1$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

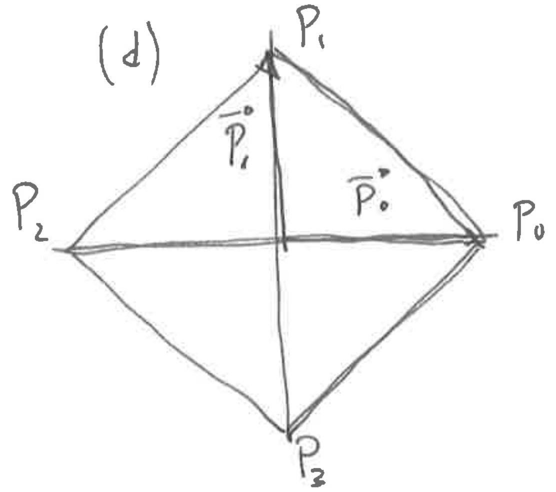
$z^4-1 = (z-1)\cdot(z^3+z^2+z+1)$ ; como ~~zla~~ $\omega^4-1=0$ y $\omega \neq 1$ $\omega = e^{\frac{2\pi i}{4}}$

$\omega^4-1 = (\omega-1)\cdot(\omega^3+\omega^2+\omega+1)$

Análogo a lo razonado en (a)

$z$ $\omega^3+\omega^2+\omega+1 = 0$

(d)




$P_0P_1 \times P_0P_2 \times P_0P_3 = 4$

$P_0P_1 = |\vec{P_0} - \vec{P_1}| = \sqrt{2}$

$P_0P_2 = |\vec{P_0} - \vec{P_2}| = 2$

$P_0P_3 = |P_0 - P_3| = \sqrt{2}$

Por el dibujo.

$P_0P_1 \times P_0P_2 \times P_0P_3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = 4$ c.q.d.

Para $n=5$; $z^5 = 1$; $z \in \mathbb{C}$; raíces $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$

$P_0P_1 \times P_0P_2 \times P_0P_3 \times P_0 \cdot P_4 = 5$

$n \geq 2$ Sea $z^n = 1$; $z \in \mathbb{C}$ $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$.

(e) Sugiera un valor para $P_0 \cdot P_1 \times \dots \times P_0P_{n-1}$.

$P_0P_1 = |1 - \omega|$

Por los patrones obtenidos "$P_0 \cdot P_1 \times \dots \times P_0P_{n-1} = n$"

(f) (i) $P_0P_1 = |1 - \omega| =$

$P_0P_2 = |1 - \omega^2|$

$P_0P_3 = |1 - \omega^3|$

$\vdots$

(ii) $P_0P_{n-1} = |1 - \omega^{n-1}|$

$z^n - 1 = (z-1) \cdot (z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1)$

(9)(f) (i)

(i) $\omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ son raíces de $(z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+z+1)$

Por tanto se puede factorizar.

$$z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+z+1 = (z-\omega)\cdot(z-\omega^2)\cdot\ \dots\ \cdot(z-\omega^{n-1})$$

Evaluando en $z=1$ se obtiene la expresión:

(ii)

$$\underbrace{1^{n-1}+1^{n-2}+\dots+1+1}_{n} = (1-\omega)\cdot(1-\omega^2)\cdot\ \dots\ \cdot(1-\omega^{n-1})$$

Pasando a la forma módulo argumental:

$$n\cdot e^{i0} = |1-\omega|\cdot e^{i\alpha_1}\cdot|1-\omega^2|e^{i\alpha_2}\cdot\ \dots\ \cdot|1-\omega^{n-1}|\cdot e^{i\alpha_{n-1}}$$

igualando módulos se tiene:

$$n = |1-\omega|\cdot|1-\omega^2|\cdot\ \dots\ \cdot|1-\omega^{n-1}| = P_0P_1\cdot P_0P_2\cdot\dots P_0P_{n-1}$$

c.q.d.