REPASO DE LAS CUESTIONES BÁSICAS DE LA 1ª EVALUACIÓN

1. ¿Cómo se modifica el índice de un radical?

Se multiplican (o dividen) el índice y el exponente del radicando por un mismo número.

$\sqrt[20]{2^{15}} =$	$\sqrt[6]{7^3} =$	$\sqrt[6]{625} =$	$\sqrt[6]{8} =$

2. ¿Cómo se suman o restan radicales?

Sólo se pueden sumar o restar radicales iguales o equivalentes (aquellos que al simplificarse quedan iguales).

$\sqrt{27} + 5 \cdot \sqrt{3} + \sqrt[4]{9} =$

$\sqrt{12} + 3 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{8} =$

3. ¿Cómo se multiplican o dividen radicales?

Se ponen todos a índice común y se aplica que el producto de raíces es igual que la raíz de un producto y que el cociente de raíces es igual que la raíz de un cociente.

$\dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{2}} =$

4. ¿Cómo se racionaliza una fracción?

Se llama racionalizar una fracción al proceso que convierte una fracción que tiene radicales en el denominador en otra equivalente que no los tiene.

Hay dos procedimientos distintos:

Si el denominador es un único radical, multiplicamos el numerador y el denominador por el radical adecuado que sea capaz de simplificar la raíz del denominador. Después operamos el numerador y lo escribimos de la forma más simplificada que podamos.

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} =$

Si el denominador es una suma o resta que contiene una o dos raíces cuadradas, multiplicamos el numerador y el denominador por la expresión conjugada del denominador (una resta si teníamos una suma o una suma si era una resta). En el denominador aplicamos diferencia de cuadrados, después operamos el numerador y lo escribimos de la forma más simplificada que podamos.

$\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} =$

5. ¿Cómo se resuelve una ecuación polinómica?
Se buscan las raíces por Ruffini, hasta llegar al segundo grado, a partir de ahí, se puede continuar por Ruffini o aplicar la fórmula de las soluciones de la ecuación de 2º grado.

Ejemplo:
Resuelve: $x^3 - 12x^2 + 41x - 30 = 0$

Las soluciones son: $x = \{$

Otro procedimiento: Se empieza igual, pero al llegar a 2º grado se aplica la fórmula.
Resuelve: $x^3 - 12x^2 + 41x - 30 = 0$

Ahora resuelvo:

Las soluciones son: $x = \{$

6. ¿Cómo se halla el resto de la división de un polinomio entre *x* – *a*?
Se puede hacer de dos maneras: por Ruffini o aplicando el teorema del resto.

Halla el resto de la división: $x^3 - 2x^2 + 4x - 3 : x + 1$
Por *Ruffini*:

El resto es:

Otro procedimiento: Por el teorema del resto. Se sustituye la incógnita por el valor de *a*. Hay que recordar que *a* es el número que se *resta* de la *x*.
Halla el resto de la división: $x^3 - 2x^2 + 4x - 3 : x + 1$

Resto =

7. ¿Es lo mismo factorizar un polinomio que resolver una ecuación polinómica?
En la práctica sí. Las raíces de un polinomio son las soluciones de la ecuación y viceversa. Únicamente hay que tener cuidado si el coeficiente del monomio con mayor exponente de x es distinto de 1, como muestra el ejercicio siguiente:

Como las soluciones de $x^2-5x+4=0$ son $x=\begin{cases}1\\4\end{cases}$ se factoriza así: $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$

Pero, $3x^2-15x+12=0$ cuyas soluciones también son $x=\begin{cases}1\\4\end{cases}$ se factoriza: $3x^2-15x+12=3(x-1)(x-4)$

O, $2x^2-3x+1=0$ cuyas soluciones son $x=\begin{cases}1\\ 1/2\end{cases}$ se factoriza: $2x^2-3x+1=2(x-1)(x-\frac{1}{2})$ aunque puede servir: $2x^2-3x+1=(x-1)(2x-1)$

Factoriza: $x^3-12x^2+41x-30$
$x^3-12x^2+41x-30=$

Factoriza: $3x^2-5x-2$
$3x^2-5x-2=$

Ejemplo:
Halla las soluciones de la ecuación, ya factorizada: $x(x+2)(x-3)=0$

Viendo los factores, las soluciones son: $x=\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$

8. ¿Cuáles son las identidades notables más importantes?

El cuadrado de la suma: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

El cuadrado de la resta: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Diferencia de cuadrados: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

Desarrolla: $(x^3 + 3x)^2$

$(x^3 + 3x)^2 =$

Convierte $9 - 6b + b^2$ en el cuadrado de una resta.

$9 - 6b + b^2 =$

Factoriza: $9x^2 - 4$

$9x^2 - 4 =$

9. ¿Qué son las sucesiones de números? ¿A qué se llama término general de la sucesión?

Son colecciones de números reales ordenados con un cierto criterio. Estos números se denominan términos de la sucesión: primer término, segundo término, etc. Se llama término general de la sucesión a una fórmula en la que sustituyendo su incógnita, que suele ser *n*, por cualquier valor entero positivo se hallaría el elemento que ocupa dicha posición. No todas las sucesiones tienen un término general conocido, pero debe existir un criterio que permita hallar sus elementos.

Por ejemplo, el término general de la sucesión de los números impares es $a_n = 2n - 1$ mientras que partiendo de la fórmula $a_n = \frac{3^n}{3n}$ se obtiene la sucesión: $\frac{3}{3}, \frac{9}{6}, \frac{27}{9}, \frac{81}{12}, \ldots$

La sucesión: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … en la que cada término –a partir del tercero– se calcula sumando sus dos términos anteriores, no tiene término general conocido. Actuaría como tal: $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ que se denomina fórmula recurrente.

10. ¿Qué son las progresiones aritméticas?

Son sucesiones en la que es constante la resta de cada término menos el anterior. Esta resta se llama diferencia y se suele representar por la letra *d*.

Sus términos generales son expresiones algebraicas de primer grado en las que el coeficiente de la incógnita *n* es el valor de la diferencia común.

Por ejemplo, al término general $a_n = 3n - 7$ le corresponde la sucesión: -4, -1, 2, 5, 8, … –con diferencia 3– mientras que a la sucesión: 2, 6, 10, 14, … –con diferencia 4– le corresponde el término general $a_n = 4n - 2$.

Si la diferencia es positiva, el valor de sus términos va aumentando, la progresión se denomina creciente.

Si la diferencia es negativa, el valor de sus términos va disminuyendo, la progresión se denomina decreciente.

11. ¿Cuál es y cómo se halla el término general de las progresiones aritméticas?

El término general de las progresiones aritméticas es: $a_n = a_1 + d(n-1)$

Partiendo de dos datos, sustituyéndolos en dicha fórmula tendremos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que nos permite hallar dicho término general.

En una progresión aritmética el quinto término es 4 y el undécimo es 12. Halla su término general.

12. ¿Qué es una serie aritmética? ¿Cómo se hallan sus elementos partiendo de una progresión aritmética?

Una serie aritmética es una sucesión construida de manera que su enésimo término sea la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética.

Por ejemplo, partiendo de la progresión aritmética -4, -1, 2, 5, 8, … se obtienen las siguientes sumas:

-4, -4 + (– 1) = -5, -4 + (– 1) + 2 = -3, -4 + (– 1) + 2 + 5 = 2, -4 + (– 1) + 2 + 5 + 8 = 10, etc

La serie aritmética será: -5, -3, 2, 10, …

Si llamamos a_n a la progresión aritmética, los elementos de la serie aritmética, siguen la fórmula: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$

Halla el término general de una progresión aritmética cuyo segundo término es 7 y la suma de sus veinte primeros términos sea -470.

13. ¿Qué son las progresiones geométricas?

Son sucesiones en la que es constante el cociente de cada término entre el anterior. Este cociente se llama razón y se suele representar por la letra *r*.

Sus términos generales son expresiones exponenciales en la incógnita *n* está en el exponente y su base es el valor de la razón común.

Por ejemplo, al término general $a_n = 2 \cdot 3^n$ le corresponde la sucesión: 6, 18, 54, 162, … –cuya razón es 3– mientras que a la sucesión: 2, 4, 8, 16, … –con 2 de razón– le corresponde el término general $a_n = 2^n$.

Si la razón es negativa, sus términos van alternando de signo, la progresión se denomina alternada.

Si la razón es mayor que 1 o menor que -1, el valor absoluto de sus términos va aumentando.

Si la razón está entre -1 y 1, el valor absoluto de sus términos va disminuyendo.

14. ¿Cuál es y cómo se halla el término general de las progresiones geométricas?

El término general de las progresiones geométricas es: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Partiendo de dos datos, sustituyéndolos en dicha fórmula tendremos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que nos permite hallar dicho término general.

El segundo término de una progresión geométrica es 13 y el quinto es 9/4. Halla su término general.

15. ¿Qué es una serie geométrica? ¿Cómo se hallan sus elementos partiendo de una progresión geométrica?

Una serie geométrica es una sucesión construida de manera que su enésimo término sea la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica.

Por ejemplo, partiendo de la progresión geométrica 6, 18, 54, 162, … se obtienen las siguientes sumas:

6, 6 + 18 = 24, 6 + 18 + 54 = 78, 6 + 18 + 54 + 162 = 240, etc

La serie geométrica será: 6, 24, 76, 240, …

Si llamamos a_n a la progresión geométrica con razón *r*, los elementos de la serie geométrica, siguen la fórmula: $S_n = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$

Halla la suma de los quince primeros términos de la progresión geométrica que tiene como primer término 2 y 0,8 de razón común.

16. ¿Se pueden sumar todos los infinitos términos de una progresión geométrica?

Aunque al principio cueste admitirlo, una suma con infinitos sumandos no tiene necesariamente que resultar infinita, evidentemente puede ser así, pero si los sumandos son suficientemente pequeños su participación en la suma global puede ser cada vez más irrelevante. Esto sucede en las progresiones geométricas decrecientes en valor absoluto. Esto es, que tengan una razón: $-1 < r < 1$

Si llamamos a_n a la progresión geométrica con razón *r* ($-1 < r < 1$), la suma de sus infinitos términos, sigue la fórmula: $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r}$

Halla la suma de todos los términos de la progresión geométrica: 4, 2, 1, 0'5, 0'25, ….

Halla la suma de la serie geométrica infinita: 72 + (-24) + 8 + (-8/3) + ….

Halla la progresión geométrica cuyo término 6 y la suma de sus infinitos términos es 30.

17. ¿En qué consiste el método de inducción y cómo se utiliza?

Es uno de los tres métodos de demostración: Deducción, Inducción y Por reducción al absurdo. El método de Inducción es útil cuando se pretende demostrar que una proposición es cierta para una infinidad de valores discretos de una variable (típicamente los infinitos valores naturales de ***n***). La comprobación de dicha proposición para cada valor concreto de la variable no es posible, pues se trata de infinitos valores. A cambio, se demuestra que la validación de la proposición se transmite de cada valor de la variable al siguiente. Sería algo así: Si la proposición es cierta para ***n*** = 1 lo será para ***n*** = 2, al ser cierta para ***n*** = 2 lo será para ***n*** = 3, etc. Quedando así validada la proposición para los infinitos valores de la variable. El esquema del método es el que sigue:

1ª fase: Comprobar que la proposición es cierta para el primer valor de la variable (típicamente ***n = 1)***

2ª fase: Comprobar que, si la proposición fuese cierta para un valor de la variable (***n = k)*** implica necesariamente que también lo es para el siguiente valor de la variable (***n = k + 1)***. La demostración de este paso se puede realizar de múltiples maneras y depende del tipo de proposición que se esté demostrando. En todos los casos utilizaremos la información de la veracidad de la proposición para ***n = k.***

Demuestra que $2^{2n}-3n-1$ *es divisible entre 9 para n =1, 2, 3,...*

1ª fase (***n = 1)***

2ª fase (***n = k)*** :

Demuestra que $a+ar+ar^2+...+ar^{n-1}=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

1ª fase (***n = 1)*** :

2ª fase (***n = k)*** :

18. ¿Cómo se opera con fracciones algebraicas?

Si se trata de un **producto** de dos fracciones, se multiplican los numeradores y se multiplican los denominadores. Estos productos se indican pero **no** se efectúan. Se factorizan numerador y denominador y se simplifican los elementos comunes. El resultado puede dejarse indicado sin operar.

Opera y simplifica: $\dfrac{6x-12}{x^2+x}\cdot\dfrac{x^2-1}{3x}$

$$\frac{6x-6}{x^2+x}\cdot\frac{x^2-1}{3x}=$$

Si se trata de un **cociente** de dos fracciones, se multiplican en cruz. Como antes, estos productos se indican pero **no** se efectúan. Se factorizan numerador y denominador y se simplifican los elementos comunes. El resultado puede dejarse indicado sin operar.

Opera y simplifica: $\dfrac{9-x^2}{x^2+1}:\dfrac{x+3}{3x^2+3}$

$$\frac{9-x^2}{x^2+1}:\frac{x+3}{3x^2+3}=$$

Si se trata de una **suma o resta** de dos fracciones, se factorizan los denominadores, se busca su mínimo común múltiplo y se ponen las fracciones con este común denominador (mínimo común múltiplo entre cada denominador por su numerador). Entonces se suman o restan los numeradores, se factoriza el nuevo numerador y se simplifican los elementos comunes. Hay que tener **mucho cuidado** con las fracciones que tienen delante un signo menos, ya que podemos confundirnos con los signos si no ponemos paréntesis. Como antes, el resultado puede dejarse indicado sin operar.

Opera y simplifica: $\dfrac{x+7}{x^2-4}-\dfrac{2}{x-2}$

$$\frac{2}{x-2}-\frac{x+7}{x^2-4}=$$

19. ¿Cómo se desarrolla la potencia de una suma (o resta)?

Se utiliza la fórmula del binomio de Newton. En la potencia de una suma todos los sumandos son positivos, en la de una resta se alternan los signos empezando con +, el signo del último sumando depende del número de ellos:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2 + \ldots\ldots + \binom{n}{n}b^n$$

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2 - \ldots\ldots$$

En cada sumando va disminuyendo de uno en uno el exponente de la *a* y aumentando el de la *b*. Los números combinatorios se obtienen del triángulo de Tartaglia o aplicando la fórmula: $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$. Si *a* ó *b* tuviesen factores, como en el primero de los ejemplos que se ve a continuación, sus potencias deben ponerse con paréntesis.

Desarrolla y simplifica $(2x+3)^4$ mediante el binomio de Newton.

$(2x+3)^4 =$

Desarrolla y simplifica $\left(\sqrt{2}-1\right)^5$ mediante el binomio de Newton.

$\left(\sqrt{2}-1\right)^5 =$

20. ¿Cómo se resuelve una ecuación irracional?

Si hay un único radical, primero **aislamos** la raíz, después **elevamos** al cuadrado, **resolvemos** la ecuación que quede y por último se **comprueban** las soluciones. La comprobación es **obligatoria**, ya que al elevar al cuadrado pueden aparecer soluciones falsas acompañadas de las verdaderas.

Si hay más de un radical, primero aislamos una de las raíces, después elevamos al cuadrado, como todavía quedará algún radical, se aplica el procedimiento anterior.

Resuelve: $x = 21 - \sqrt{x+9}$

$x = 21 - \sqrt{x+9} \Rightarrow$

Comprobamos las soluciones:

Resuelve: $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = 1$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow$

Comprobamos la solución:

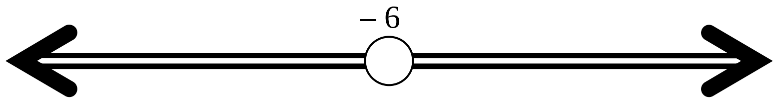
21. ¿Cómo se resuelve una inecuación?

Podemos tener inecuaciones polinómicas (de primer grado, segundo grado etc.) o inecuaciones racionales (con expresiones algebraicas en los denominadores). El método general consiste en convertir la desigualdad en igualdad, se resuelve la ecuación, si fuese una inecuación racional, se igualan a cero los denominadores para obtener sus raíces. Se utilizan todos los valores obtenidos para trocear la recta real y se validan las distintas zonas probando un valor numérico perteneciente a cada intervalo. Las soluciones obtenidas anulando los denominadores nunca forman parte de la solución final. Para las inecuaciones de primer grado se puede también emplear otro procedimiento más rápido que consiste en actuar como se tratase de una ecuación teniendo cuidado de voltear la desigualdad cuando se cambiase el signo a ambos miembros.

<u>Ejemplo de inecuación de primer grado (primer procedimiento):</u>

Resuelve: $2x-\frac{1}{3}\le\frac{7x+4}{6}+x$

$$2x-\frac{1}{3}=\frac{7x+4}{6}+x\Rightarrow 12x-2=7x+4+6x\Rightarrow -x=6\Rightarrow x=-6$$



Comprobamos un valor cualquiera de la zona izquierda, por ejemplo el – 8:

$$2\cdot(-8)-\frac{1}{3}\le\frac{7\cdot(-8)+4}{6}+(-8)\Rightarrow -16-\frac{1}{3}\le\frac{-56+4}{6}-8\Rightarrow -\frac{49}{3}\le\frac{-52}{6}-8\Rightarrow -98\le -52-48\Rightarrow -98\le -100$$

Vemos la desigualdad no se cumple, lo que invalida la zona izquierda.

Comprobamos ahora un valor cualquiera de la segunda zona, por ejemplo el 0:

$$2\cdot 0-\frac{1}{3}\le\frac{7\cdot 0+4}{6}+0\Rightarrow -\frac{1}{3}\le\frac{4}{6}\Rightarrow -\frac{1}{3}\le\frac{2}{3}$$

Vemos la desigualdad sí se cumple, lo que valida la segunda zona.
La solución es entonces el intervalo $[-6,+\infty)$. Se incluye – 6 porque esta inecuación permite la igualdad.

<u>Ejemplo de inecuación de primer grado (segundo procedimiento):</u>

Resuelve: $2x-\frac{1}{3}\le\frac{7x+4}{6}+x$

$$2x-\frac{1}{3}\le\frac{7x+4}{6}+x\Rightarrow 12x-2\le 7x+4+6x\Rightarrow -x\le 6\Rightarrow x\ge -6$$

En el último paso la desigualdad de voltea de menor o igual a mayor o igual puesto que hemos cambiado el signo de los dos miembros de la inecuación

La solución es entonces el intervalo $[-6,+\infty)$. Se incluye – 6 porque esta inecuación permite la igualdad.

<u>Inecuación de primer grado (segundo procedimiento):</u>

Resuelve: $x-\frac{3x-1}{2}>\frac{3x-1}{4}$

Inecuación de segundo grado:

Resuelve: $x^2 - 4x > 12$

Inecuación racional:

Resuelve: $x + 1 \leq \dfrac{3x-2}{x-2}$

22. ¿Cómo se resuelve un sistema de inecuaciones?

Se resuelve cada inecuación por separado, como hemos visto en los ejemplos anteriores, y se busca la zona común (si existe) de los intervalos solución de cada inecuación.

Resuelve: $\begin{cases} 2 - x < x + 4 \\ 4x - 2 \leq x + 7 \end{cases}$

23. ¿Cómo se resuelve un sistema de ecuaciones?

El primer paso es simplificar lo más posible cada ecuación por separado de las demás. Suele ser aconsejable evitar que queden denominadores o decimales. A continuación observaremos si se trata de un sistema lineal o de uno no lineal.

Si se trata un sistema **no lineal** el método que da mejor resultado el de sustitución. Se despeja una incógnita de una ecuación y se sustituye en la otra de manera que quede una única ecuación con una única incógnita que se resuelve para después calcular la incógnita despejada en primer lugar. Es prudente comprobar las soluciones obtenidas.

Resuelve: $\begin{cases} x \cdot y = 6 \\ (x-2)\cdot(y+0{,}80) = 6 \end{cases}$

Si se trata un sistema **lineal** con dos incógnitas, aunque se pueda utilizar tanto el método de igualación como el de sustitución, es aconsejable usar el de **reducción**. Se multiplican las ecuaciones por los coeficientes adecuados para que se elimine una incógnita al sumar las ecuaciones. Una vez calculada esta incógnita se puede sustituir en cualquiera de las ecuaciones para hallar la otra incógnita. Otra posibilidad es utilizar de nuevo la reducción para eliminar la otra incógnita.

<u>Ejemplo:</u>

Resuelve: $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 2x - 6y = -3 \end{cases}$

Si se trata un sistema **lineal** con más de dos incógnitas el método aconsejable es el de Gauss.

24. ¿Cómo se plantea un problema de enunciado?

Primero leemos detenidamente el enunciado identificando las condiciones que se deben cumplir, después definimos claramente las variables que aparezcan implicadas en el texto, tantas variables como condiciones. Si no tenemos muy claro qué variables definir utilizaremos al menos la(s) que aparezca(n) en la pregunta del problema. Cada condición se convertirá en una ecuación y debería de haber tantas ecuaciones como incógnitas. Resolvemos entonces el sistema de ecuaciones y comprobamos la solución obtenida comprobando que valida el enunciado del problema.

Se debe poner la solución en forma de frase y con las unidades de medida adecuadas.

Ejemplo:

Varios amigos toman un refresco cada uno en una terraza y deben pagar 6 € por el total de las consumiciones. Como dos no tienen dinero, los demás les invitan, debiendo aumentar su aportación en 0,80€ cada uno. ¿Cuántos amigos son?

En la pregunta final del enunciado queda definida la primera variable:

x = número de amigos

De la lectura del enunciado vemos que será necesario fijar el dinero que deba poner cada amigo, por lo tanto parece razonable definir como segunda variable:

y = precio de cada refresco

Como tenían que pagar 6€ en total, la primera ecuación será: $x \cdot y = 6$

Si dos no pagan, serán x – 2 amigos los que tendrán que poner *0,80€* más que antes, es decir y + 0,80, por lo tanto la segunda ecuación será: $(x-2)\cdot(y+0{,}80)=6$

El sistema será entonces: $\begin{cases} x \cdot y = 6 \\ (x-2)\cdot(y+0{,}80)=6 \end{cases}$

Este sistema ya ha sido resuelto antes. Obtuvimos para la variable x dos posibles valores: 5, –3. Como esta variable representa el nº de amigos, excluimos la solución negativa. Queda entonces: x = 5 y = 1,2

Solución del problema: **Son 5 amigos y cada refresco costó 1,20€**.

Un grupo de estudiantes alquila un piso por 490 € al mes. Si fueran dos más, cada uno pagaría 28 € menos. ¿Cuántos son?

25. ¿Qué es el logaritmo de un número?

Las funciones logarítmicas son las recíprocas de las exponenciales. Lo primero que debemos tener claro es que, de la misma manera que hay distintas exponenciales para cada número real que esté en su base, también habrá infinitas funciones logarítmicas según el número real de su base, que deberá ser siempre mayor que cero. El logaritmo en base ***b*** de un número será el exponente al que hay que elevar la base ***b*** para obtener dicho número:

$$\log_b x = y \leftrightarrow b^y = x$$

En cualquier base, no existen los logaritmos de los números negativos ni tampoco del cero. Sólo se puede calcular el logaritmo de un número mayor que cero.

Al logaritmo en base 10 se le llama logaritmo decimal y se le permite no poner un 10 en su base. Al logaritmo en base el número ***e*** (2,71828…) se le llama logaritmo neperiano y se le representa como ln.

<u>Ejemplo:</u>

$\log_3 81 = 4 \leftrightarrow 3^4 = 81$ Es decir: el logaritmo en base 3 del 81 es 4 porque 4 es el exponente al que hay que elevar el 3 para que resulte 81.

$\log_2 32 = 5 \leftrightarrow$

$\log_{10} 100 = 2 \leftrightarrow$

$\ln 1 = 0 \leftrightarrow$

26. ¿Cuáles son las propiedades de los logaritmos?

Las propiedades son las mismas independientemente del valor de su base.

- $\log_b 1 = 0$ Es decir: el logaritmo del 1 es 0 en cualquier base.
- $\log_b b = 1$ Es decir: el logaritmo de la propia base es 1.
- $\log_b (x_1 \cdot x_2) = \log_b x_1 + \log_b x_2$ Es decir: el logaritmo del producto de dos números coincide con la suma de sus logaritmos.
- $\log_b \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_b x_1 - \log_b x_2$ Es decir: el logaritmo del cociente de dos números coincide con la resta de sus logaritmos.
- $\log_b (x)^n = n \cdot \log_b x$ Es decir: el logaritmo de un número elevado a un exponente coincide con el exponente multiplicado por el logaritmo del número.
- $\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{\log_b x}{n}$ Es decir: el logaritmo de raíz de un número coincide con el logaritmo del número dividido por el índice de la raíz.
- No existen propiedades para el logaritmo de la suma o resta de números.
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ Esta propiedad nos permite cambiar de base. Es decir, podríamos calcular un logaritmo en base ***a*** conociendo los logaritmos en base ***b.***

<u>Ejemplo:</u>

En cierta base ***b*** conocemos que $\log_b 2 = 0{,}3562$ y $\log_b 10 = 1{,}1833$. Halla $\log_b 8$, $\log_b 5$, $\log_b \left(1000 \cdot \sqrt{2}\right)$

$\log_b 8 = \log_b 2^3 = 3 \cdot \log_b 2 = 3 \cdot 0{,}3562 = 1{,}0686$

$\log_b 5 = \log_b \left(\frac{10}{2}\right) =$

$\log_b \left(1000 \cdot \sqrt{2}\right) =$

27. ¿Para qué sirven los logaritmos?

Independientemente de que son funciones muy frecuentes en las soluciones de las ecuaciones diferenciales, si las consideramos únicamente como herramientas algebraicas son de aplicación indispensable siempre que necesitemos resolver una ecuación en la que la incógnita esté situada en el exponente. En dicha situación se 'toman' logaritmos, es decir, igualar el logaritmo del primer miembro de la ecuación al logaritmo del segundo miembro, a continuación la propiedad del logaritmo de una potencia nos permitirá 'bajar' la incógnita del exponente y así poder despejarla fácilmente. Se puede emplear cualquier logaritmo, pero habitualmente se usan el decimal o el neperiano, que son los logaritmos que aparecen en cualquier calculadora científica.

Una población tiene 20.000 habitantes y crece de manera constante a un 13% anual. Calcula cuánto tiempo debe pasar para disponer de 36.850 habitantes.

El modelo de crecimiento exponencial es: $N = 20.000 \cdot 1{,}13^t$

28. ¿En qué unidades se miden los ángulos?

El sistema clásico de medida de ángulos es el sexagesimal que divide el ángulo recto en 90º. Existe un grado centesimal que divide el ángulo recto en 100º, pero no se usa. Ambas son medidas artificiales, la medida natural es el radián que mide los ángulos a través de las longitudes de los arcos sobre una circunferencia de radio igual a 1. Es decir, que al ángulo recto le corresponde la cuarta parte del perímetro de una circunferencia de radio uno: $\text{Ángulo Recto} = \frac{2\pi \cdot 1}{4} = \frac{\pi}{2}\ \text{Radianes}$

Las calculadoras disponen de los tres tipos. Suelen simbolizarlos con: DEG, GRAD, RAD para los grados sexagesimales, centesimales y los radianes respectivamente.

Para hacer la conversión de grados sexagesimales a radianes basta con aplicar el factor de conversión $\frac{\pi\ \text{Radianes}}{180^{\circ}}$ y para convertir un ángulo en radianes a grados sexagesimales el factor $\frac{180^{\circ}}{\pi\ \text{Radianes}}$

29. ¿Qué son las razones trigonométricas?

En principio son conceptos diseñados para relacionar los ángulos y los lados en un triángulo rectángulo. A continuación se extiende la definición para cualquier tipo de ángulo y por último acaban siendo funciones con identidad propia que les permite ser utilizadas en ámbitos que van mucho más allá de los triángulos.

30. ¿Cómo se definen las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo?

Partimos de un ángulo agudo **α** perteneciente a un triángulo rectángulo. El seno, el coseno y la tangente de este ángulo se definen a través de las longitudes de los catetos y la hipotenusa. Diferenciamos los dos catetos según su situación respecto del ángulo: ya sea formando parte del ángulo (cateto contiguo) o en frente suyo (cateto opuesto). Las definiciones son:

$$sen\alpha = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Cateto Contiguo}}{\text{Hipotenusa}} \qquad tg\alpha = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Contiguo}}$$

Para un ángulo igual a cero se entiende que el cateto opuesto es cero y que coinciden el cateto contiguo y la hipotenusa, por lo que su seno y tangente son nulos y su coseno es igual a uno. Para un ángulo recto se entiende que el cateto contiguo es cero y que coinciden el cateto opuesto y la hipotenusa, por lo que su coseno es nulo, su seno es igual a uno no tiene definida su tangente al anularse el denominador.

Aplicando el teorema de Pitágoras se deducen otros valores, que forman la siguiente tabla:

	0º	30º	45º	60º	90º
Seno					
Coseno					
Tangente					

Si invertimos estas definiciones tendremos las razones trigonométricas inversas, de nombre: cosecante, secante y cotangente:

$$\text{cosec}\alpha = \frac{1}{sen\alpha} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Contiguo}} \qquad \text{cotg}\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{\text{Cateto Contiguo}}{\text{Cateto Opuesto}}$$

31. ¿Cómo están relacionadas entre si las razones trigonométricas de un mismo ángulo?

La primera relación que nace directamente de sus definiciones es: $\text{tg}\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad \text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$

Aplicando directamente el teorema de Pitágoras tendremos la llamada propiedad fundamental de la Trigonometría:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

De ésta se deducen: $\qquad 1 + tg^2\alpha = \sec^2\alpha \qquad\qquad 1 + \text{cotg}^2\alpha = \text{cosec}^2\alpha$

Con estas identidades, podríamos calcular las restantes razones trigonométricas partiendo de una cualquiera de ellas, como vemos en los siguientes ejemplos:

<u>Halla las restantes razones trigonométricas partiendo de una dada</u>:

- Sea $sen\alpha = 0{,}6$

$sen\alpha = 0{,}6 \Rightarrow$

- Sea $\cos\alpha = \frac{5}{12}$

$\cos\alpha = \frac{5}{12} \Rightarrow$

- Sea $tg\alpha = 2$

$tg\alpha = 2 \Rightarrow$

- Sea $\sec\alpha = 5$

$\sec\alpha = 5 \Rightarrow$

- Sea $\operatorname{cosec}\alpha = 3$

$\operatorname{cosec}\alpha = 4 \Rightarrow$

- Sea $\operatorname{cotg}\alpha = 0{,}2$

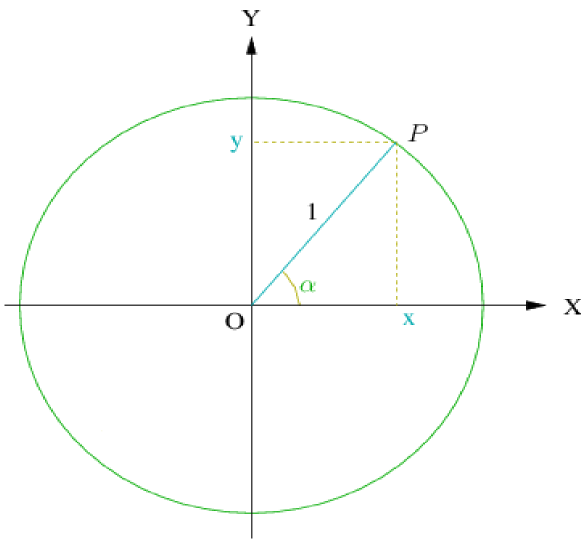
$\operatorname{cotg}\alpha = 0{,}2 \Rightarrow$

32. ¿Qué es la circunferencia Goniométrica?

Se trata de una circunferencia con radio igual a 1. Eligiendo un punto cualquiera ***P*** de la misma, tendremos definido un radio que forma con la parte positiva del eje ***X*** un ángulo α. Las coordenadas del punto ***P***(***x***, ***y***) coinciden respectivamente con el coseno y el seno del ángulo α.

Es muy intuitivo pensar que si trazamos un ángulo de supere una vuelta completa a la circunferencia, volveríamos a repetir los mismos puntos y coordenadas ***P***(***x***, ***y***).

Los ángulos se consideran positivos si se giran con sentido anti-horario y negativos si se giran como las agujas del reloj.



33. ¿Cómo se define se definen las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera?

Superando la anterior definición con catetos e hipotenusa, todo consiste en trazar el ángulo sobre la circunferencia goniométrica e identificar el coseno y seno del ángulo con las respectivas coordenadas ***x*** e ***y*** del punto ***P*** situado sobre la circunferencia.

De esta forma, tomarían los mismos valores que antes las razones trigonométricas de los ángulos agudos y quedarían definidas para ángulos positivos y negativos de cualquier amplitud.

Con esta nueva definición, podríamos ampliar la tabla de valores conocidos de seno, coseno y tangente para ángulos de los otros tres cuadrantes:

	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
Seno									
Coseno									
Tangente									

	210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
Seno								
Coseno								
Tangente								

34. ¿Qué valores pueden tomar las razones trigonométricas?

Tal como las hemos definido tendremos:

$-1 \le sen\alpha \le 1$ $\quad -1 \le \cos\alpha \le 1$ $\quad -\infty \le tg\alpha \le +\infty$

$1 \le |\mathrm{cosec}\alpha| < +\infty$ $\quad 1 \le |\sec\alpha| < +\infty$ $\quad -\infty \le \mathrm{cotg}\alpha \le +\infty$

35. ¿Para qué ángulos se repiten las razones trigonométricas de distintos cuadrantes?

La simetría de la circunferencia nos asegura que los valores de las razones trigonométricas se van a repetir con el mismo o distinto signo según cambiamos de cuadrantes. Son las siguientes relaciones:

Ángulos que difieren en 360º: $sen(\alpha + 360) = sen\alpha$ $\quad \cos(\alpha + 360) = \cos\alpha$ $\quad tg(\alpha + 360) = tg\alpha$

Ángulos que difieren en 180º: $sen(\alpha + 180) = -sen\alpha$ $\quad \cos(\alpha + 180) = -\cos\alpha$ $\quad tg(\alpha + 180) = tg\alpha$

Ángulos Opuestos: $sen(-\alpha) = -sen\alpha$ $\quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\quad tg(-\alpha) = -tg\alpha$

Ángulos Complementarios: $sen(90 - \alpha) = \cos\alpha$ $\quad \cos(90 - \alpha) = sen\alpha$ $\quad tg(90 - \alpha) = \mathrm{cotg}\alpha$

Ángulos Suplementarios: $sen(180 - \alpha) = -sen\alpha$ $\quad \cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha$ $\quad tg(180 - \alpha) = -tg\alpha$

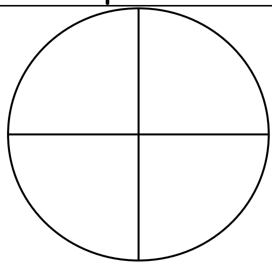
Si tenemos un ángulo que supere una vuelta completa, podemos hallar otro ángulo en su misma posición situado entre 0 y 360º. Para encontrarlo, basta con hallar el resto de su división entre 360º. Si es negativo, se actúa igual, pero luego se le suma 360º.

$sen1946^{o} = sen(5 \cdot 360^{o} + 146^{o}) = sen146^{o}$

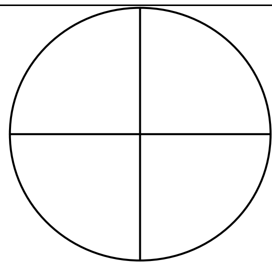
$\cos(-1946^{o}) =$

36. Utilizando la calculadora, halla, redondeados a grados, dos ángulos positivos menores de 360º que tengan la razón indicada y sitúalos aproximadamente sobre la circunferencia goniométrica:

$sen\alpha = -0{,}2588$



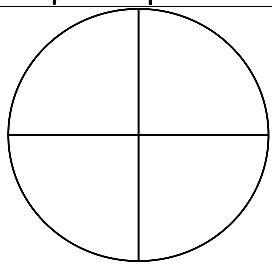
$\cos\alpha = 0{,}8191$



37. Sin utilizar la calculadora, únicamente situando dos ángulos sobre la circunferencia goniométrica, halla, redondeado a grados, el ángulo que cumpla las condiciones indicadas:

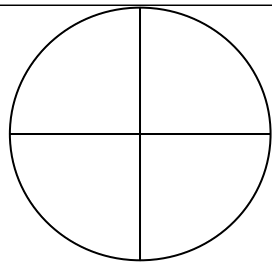
$tg\alpha = -tg307^o$

$180^o \le \alpha \le 270^o$



$sen\alpha = -\cos 100^o$

$0^o \le \alpha \le 90^o$



38. ¿Son lineales las razones trigonométricas?

Si pensamos en algunos valores conocido enseguida nos damos cuenta que ninguna razón trigonométrica es lineal. Por ejemplo el seno del 180º no se parece en nada al doble del seno de 90º. Sin embargo hay unas fórmulas que permiten relacionarlos. Son las siguientes:

Suma de ángulos: $sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot sen\beta$ $\quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - sen\alpha\cdot sen\beta$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Resta de ángulos: $sen(\alpha-\beta) = sen\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot sen\beta$ $\quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + sen\alpha\cdot sen\beta$

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Ángulo doble: $sen(2\alpha) = 2\cdot sen\alpha\cdot\cos\alpha$ $\quad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$ $\quad tg(2\alpha) = \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

Ángulo mitad: $sen\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\quad \cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ $\quad tg\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

Suma/Resta de senos: $sen\alpha + sen\beta = 2sen\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\quad sen\alpha - sen\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot sen\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

Suma/Resta de cosenos: $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2sen\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot sen\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Ejemplos:

$sen75^o = sen(45^o + 30^o) =$

$\cos 75^o = \cos(45^o + 30^o) =$

$tg\,75^\circ = tg\,(45^\circ + 30^\circ) =$

$sen\,15^\circ = sen\,\dfrac{30^\circ}{2} =$

$\cos 15^\circ = \cos \dfrac{30^\circ}{2} =$

39. ¿Cómo se hallan los ángulos de los que conocemos alguna de sus razones trigonométricas?

Lo primero que conviene saber es que no hay un único ángulo para cada valor concreto de una razón trigonométrica. Salvo en 0º, 90º, 180º y 270º, **siempre** tendremos dos ángulos entre 0 y 360º pertenecientes a cuadrantes distintos y todos los situados en sus mismas posiciones y que difieren de ellos en vueltas completas. En definitiva, infinitos ángulos.

Como ejemplo, con valor de seno igual a 0,5, tendríamos: 30º, 150º, 390º, 510º, ...-210º, -330º, ...

Por otro lado, cualquier calculadora científica dispone de las funciones recíprocas de las trigonométricas y que no debemos confundir con las inversas: cosecante, secante o cotangente. Son las llamadas arco seno (sen^{-1}), arco coseno ($\cos^{-1}$) y arco tangente (tg^{-1}). Estas funciones está claro que responden a la pregunta: '*¿Cuál es el ángulo cuyo seno (coseno, tangente) es...?* pero debemos saber cuál de los infinitos ángulos propone como respuesta. sen^{-1} y tg^{-1} dan como respuesta un ángulo entre -90º y 90º mientras que $\cos^{-1}$ responde con un ángulo entre 0º y 180º. Si necesitásemos hallar cualquier otro ángulo distinto del que propone, lo tendríamos que localizar nosotros aplicando las relaciones ya vistas. En los siguientes ejemplos damos las respuestas con ángulos, redondeados a grados, entre 0 y 360 sumados o restados de vueltas completas. En los ejemplos con tg^{-1} las dos soluciones y sus vueltas completas se pueden poner como una solución y medias vueltas completas.

Ejemplos:

$$sen\,\alpha = 0{,}515 \rightarrow sen^{-1}0{,}515 = 31^\circ \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 31^\circ \pm n\cdot 360^\circ \\ 149^\circ \pm n\cdot 360^\circ \end{cases} \; (n = 0,1,2,...)$$

$sen\,\alpha = -0{,}454 \rightarrow$

$\cos\alpha = 0{,}53 \rightarrow$

$\cos\alpha = -0{,}191 \rightarrow$

$tg\,\alpha = 14{,}3 \rightarrow$

$tg\,\alpha = -0{,}07 \rightarrow$

40. ¿Cómo se resuelven las ecuaciones trigonométricas?

El apartado anterior trata en realidad del caso más elemental de ecuación trigonométrica: Una única razón trigonométrica igualada a un número. Si aparece más de una razón trigonométrica debemos emplear las identidades trigonométricas hasta que en la ecuación aparezca una única razón. Normalmente se le identifica con una letra y se resuelve la ecuación resultante, que puede ser de segundo grado, polinómica, irracional etc. No hay que olvidar que por cada valor de la razón trigonométrica hay dos ángulos distintos. También hay que tener cuidado cuando se eleva al cuadrado, tendremos que comprobar todas las soluciones, ya que pueden aparecer soluciones falsas. Hay pocas instrucciones generales que dar, es posible que en cada caso se actúe de manera diferente.

Ejemplo:

$$50 sen^2 x - 5 senx - 3 = 0$$

$$senx = t$$

$$50t^2 - 5t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 50 \cdot 3}}{2 \cdot 50} = \begin{cases} 0{,}3 \rightarrow sen^{-1} 0{,}3 = 17{,}46º \Rightarrow x = \begin{cases} 17{,}46º \\ 180º - 17{,}46º = 162{,}54º \end{cases} \\ -0{,}2 \rightarrow sen^{-1}(-0{,}2) = -11{,}54º \Rightarrow x = \begin{cases} 360º - 11{,}54º = 348{,}46º \\ 180º + 11{,}54º = 191{,}54º \end{cases} \end{cases}$$

Ejemplo:

$$senx - 2\cos x - 2 = 0$$

$$senx - 2\cos x - 2 = 0 \rightarrow senx = 2\cos x + 2 \rightarrow sen^2 x = (2\cos x + 2)^2 \rightarrow sen^2 x = 4\cos^2 x + 8\cos x + 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - \cos^2 x = 4\cos^2 x + 8\cos x + 4 \Rightarrow 5\cos^2 x + 8\cos x + 3 = 0$$

$$\cos x = t$$

$$5t^2 + 8t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2 \cdot 5} = \begin{cases} -0{,}6 \rightarrow \cos^{-1}(-0{,}6) = 126{,}87º \Rightarrow x = \begin{cases} 126{,}87º \\ 360º - 126{,}87º = 233{,}13º \end{cases} \\ -1 \rightarrow \cos^{-1}(-1) = 180º \Rightarrow x = 180º \end{cases}$$

Se comprueban las tres soluciones, descubriendo que sólo son válidas dos de ellas 180º y 126,87º

Resuelve:

$$\cos 5x = -0{,}5$$

Resuelve:

$$\cos 2x + 5\cos x = -3$$

Resuelve:

$3\cos x - senx = 2$