* Un vector es una cantidad que tiene medida (magnitud) y dirección

* Dos vectores son iguales, si tienen la misma medida y dirección

* Un punto se representa con una letra mayúscula y sus coordenadas entre paréntesis separados por comas

$$A(a_1, a_2, a_3) \quad \text{en } \mathbb{R}^3$$

* Un vector se representa con una letra minúscula con una flecha encima, o bien con 2 letras mayúsculas con una flecha encima, la primera letra es el punto origen y el 2º el punto destino de la flecha (vector). También se representa con letras minúsculas en negrita

$$\mathbf{v} = \vec{v} = \vec{AB} = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}$$

(en $\mathbb{R}^2$) ① ② ③ ④

① Notación horizontal
② Notación vertical
③ Cálculo de las componentes del vector, resta de coordenadas de los puntos extremo menos origen
④ Notación utilizando vectores unitarios

* Los vectores unitarios básicos de magnitud 1 en $\mathbb{R}^3$ son:

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

* Un vector en $\mathbb{R}^3$, general:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \cdot \vec{K} = (v_1, v_2, v_3)$$

No confundir con la notación de los puntos.

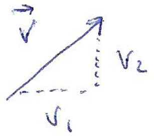
* Debes entender lo siguiente para vectores, tanto en forma algebraica como geométrica (repaso)

- Adición de vectores
- Sustracción de vectores $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w})$
- Multiplicación por un escalar K para producir el vector $K \cdot \vec{v}$ que es paralelo a $\vec{v}$
-

CONT.

* – la magnitud del vector $\vec{v}$, $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$ (generalización de Pitágoras en $\mathbb{R}^3$)

en $\mathbb{R}^2$



$$|\vec{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2$$

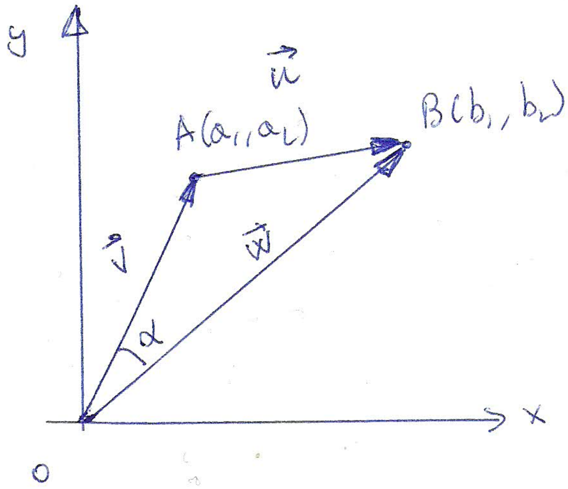
$$\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$

– la distancia entre 2 puntos en el espacio es la magnitud del vector que los une

---

* El vector de posición del punto $A(a_1, a_2, a_3)$ es $\vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$

Figura 1



$\boxed{\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}}$ por (Adición vector)

luego:

$\boxed{\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}} = \vec{w} - \vec{v}$

vector posición

vector posición

ojo - (No coordenadas de puntos).

$$AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2} \quad \text{en } \mathbb{R}^2$$

* $AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2}$ en $\mathbb{R}^3$

* Punto medio de $\vec{AB}$ es: $\left(\frac{b_1+a_1}{2}, \frac{b_2+a_2}{2}, \frac{b_3+a_3}{2}\right)$

* A, B y C son Colineales si $\vec{AB} = K \cdot \vec{AC}$; ó $\vec{AC} = K \cdot \vec{AB}$, ó $\vec{AB} = K \cdot \vec{BC}$ ...

* El vector unitario en la dirección de $\vec{v}$ es $\frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} \rightarrow \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

PRODUCTO ESCALAR de 2 vectores

De la fig 1; Aplicamos teorema del coseno al triángulo:

$$|AB|^2 = |OB|^2 + |OA|^2 - \underline{2|OB|\cdot|OA|\cdot\cos\alpha} \qquad (1)$$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$; $|\vec{AB}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

$\vec{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$; $|\vec{OB}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$

$\vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$; $|\vec{OA}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Sustituyendo en (1)

$$2|\vec{OB}|\cdot|\vec{OA}|\cdot\cos\alpha = |\vec{OB}|^2 + |\vec{OA}|^2 - |\vec{AB}|^2$$

$$2|\vec{OB}|\,|\vec{OA}|\cdot\cos\alpha = (b_1^2 + b_2^2) + (a_1^2 + a_2^2) - ((b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2)$$

$$2|\vec{OB}|\cdot|\vec{OA}|\cdot\cos\alpha = \cancel{b_1^2} + \cancel{b_2^2} + \cancel{a_1^2} + \cancel{a_2^2} - \cancel{b_1^2} - \cancel{a_1^2} + 2b_1a_1 - \cancel{b_2^2} - \cancel{a_2^2} + 2b_2a_2$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2}{|\vec{OB}|\cdot|\vec{OA}|}}$$ → Este modo de multiplicar las componentes de los vectores le llamaremos "producto escalar" o producto PUNTO

$$\vec{OA}\bullet\vec{OB} = a_1 b_1 + a_2\cdot b_2$$

en $\mathbb{R}^3$ → $\boxed{\vec{OA}\bullet\vec{OB} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$

---

luego:

1 $\boxed{\cos\alpha = \dfrac{\vec{v}\bullet\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}}$ ó despejando 2 $\boxed{\vec{v}\bullet\vec{w} = |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos\alpha}$

pero tb: 3 $\boxed{\vec{v}\bullet\vec{w} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3\cdot b_3}$

- luego $\vec{v}$ es $\perp$ a $\vec{w}$ si y sólo si $\vec{v}\bullet\vec{w} = 0$
- Si $\vec{v}\bullet\vec{w} > 0$ el ángulo α es agudo
- Si $\vec{v}\bullet\vec{w} < 0$ " " " " obtuso. ...

.. VER TODAS LAS PROPIEDADES .... (Hay más)

Propiedades del Producto escalar:

Def.

$$\vec{v} \circ \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\theta \quad (\theta \text{ es el ángulo entre los 2 vectores})$$

$$\vec{v} \circ \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3$$

propiedades:

- $\vec{v} \circ \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
- $\vec{u} \circ (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \circ \vec{v} + \vec{u} \circ \vec{w}$
- $(K\vec{v}) \circ \vec{w} = K(\vec{v} \circ \vec{w})$
- $\vec{v} \circ \vec{v} = |\vec{v}|^2$

Si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ No son el vector nulo:

- $\vec{v} \perp \vec{w} \iff \vec{v} \circ \vec{w} = 0$
- $\vec{v} \parallel \vec{w} \iff |\vec{v} \circ \vec{w}| = |\vec{v}| \times |\vec{w}|$; $\Rightarrow \vec{v} = K \circ \vec{w}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \circ \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

- Si $\vec{v} \circ \vec{w} > 0 \Rightarrow \theta$ es agudo.
- Si $\vec{v} \circ \vec{w} < 0 \Rightarrow \theta$ es obtuso.

PRODUCTO VECTORIAL O PRODUCTO CRUZ de 2 vectores

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$\vec{v} \times \vec{w}$ es $\perp$ a $\vec{v}$ y $\vec{w}$; Regla mano derecha de sentido.

PROPIEDADES:

- Si $\vec{v} \times \vec{w} = 0 \Rightarrow \vec{v} \parallel \vec{w}$
- $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
- $K\vec{v} \times \vec{w} = K(\vec{v} \times \vec{w})$

- $|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \operatorname{sen}\theta$ (θ es el ángulo entre los 2 vectores)
- $|\vec{v} \times \vec{w}|$ = área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$
- $\frac{1}{2}|\vec{v} \times \vec{w}|$ = área del triángulo " " " " " "