Serie 3: Logaritmos - Soluciones

1. Explica con palabras el significado de que el logaritmo en base **b** de un número **x** sea **y**.

El logaritmo **y** de un número **x** es el exponente al que hay que elevar la base **b** para que resulte dicho número. Por lo tanto: $b^y = x$

2. Sin hacer uso de la calculadora, únicamente aplicando su definición, halla los siguientes logaritmos:

$\log_{10} 1000 =$ 3 Porque $10^3 = 1000$	$\log_{10} 0{,}01 =$ -2 Porque $10^{-2} = 0{,}01$	$\log_{10} 10^6 =$ 6 Porque $10^6 = 10^6$	$\log_{10} 10 =$ 1 Porque $10^1 = 10$
$\log_2 64 =$ 6 Porque $2^6 = 64$	$\log_3 81 =$ 4 Porque $3^4 = 81$	$\log_5 25 =$ 2 Porque $5^2 = 25$	$\log_7 1 =$ 0 Porque $7^0 = 1$

3. Usando la definición de logaritmo, halla x:

$\log_{10} x = -4$	$x = 10^{-4} = 0{,}0001$	$\log_x 16 = 2$	$x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4 \rightarrow x =$ 4
$\log_9 x = 0{,}5$	$x = 9^{0,5} = 9^{1/2} = \sqrt{9} = 3$	$\log_x 9 = -2$	$x^{-2} = 9 \rightarrow \frac{1}{x^2} = 9 \rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \rightarrow$ $\rightarrow x = \pm 1/3 \rightarrow x =$ 1/3

4. Indica razonadamente si son verdaderas o falsas las siguientes igualdades:

$\log_7 2 + \log_7 3 = \log_7 5$	FALSA. La suma de logaritmos **no** es igual al logaritmo de la suma.
$\log_4 2 + \log_4 3 = \log_4 6$	VERDADERA. La suma de logaritmos **sí** es igual al logaritmo del producto.
$\log_6 2 + \log_6 3 = 1$	VERDADERA. La suma de logaritmos **sí** es igual al logaritmo del producto y el logaritmo en cualquier base de la propia base es 1..
$\log_7 6 - \log_7 2 = \log_7 4$	FALSA. La resta de logaritmos **no** es igual al logaritmo de la resta.
$\log_5 6 - \log_5 2 = \log_5 3$	VERDADERA. La resta de logaritmos **sí** es igual al logaritmo del cociente.
$\log_6 8 = 3\log_6 2$	VERDADERA. El logaritmo de una potencia **sí** es igual al exponente por el logaritmo de la base.
$\log\left(2^5\right) = \left(\log 2\right)^5$	FALSA. El logaritmo de una potencia **no** es igual al logaritmo de la base elevado al exponente.

5. Sin hacer uso de la calculadora, únicamente aplicando las propiedades de los logaritmos, halla:

$\log_3 81 = \log_3\left(3^4\right) = 4\log_3 3 = 4 \cdot 1 = 4$	$\log_2 32 = \log_2\left(2^5\right) = 5\log_2 2 = 5 \cdot 1 = 5$
$\log_5\left(1/25\right) = \log_5\left(5^{-2}\right) = -2\log_5 5 = -2 \cdot 1 = -2$	$\log_2 0'5 = \log_2\left(2^{-1}\right) = -1 \cdot \log_2 2 = -1 \cdot 1 = -1$
$\log_7 \sqrt[3]{49} = \log_7\left(7^{2/3}\right) = \frac{2}{3}\log_7 7 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$	$\log_3 \frac{27}{\sqrt{3}} = \log_3 27 - \log_3 \sqrt{3} = \log_3\left(3^3\right) - \log_3\left(3^{1/2}\right) =$ $= 3\log_3 3 - \frac{1}{2}\log_3 3 = 3 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

6. Usando la calculadora directamente o utilizando la fórmula de cambio de base, halla los siguientes logaritmos redondeando el resultado con tres cifras decimales:

$\log_7 23 =$ 1,611 También: $\log_7 23 = \frac{\log_{10} 23}{\log_{10} 7} = 1{,}611$	$\log_5 12 =$ 1,544 También: $\log_5 12 = \frac{\log_{10} 12}{\log_{10} 5} = 1{,}544$

7. En una cierta base desconocida b, conocemos los siguientes logaritmos: $\log_b 12 = 1{,}544$ y $\log_b 4 = 0{,}861$. Aplicando las propiedades de los logaritmos, halla:

$\log_b 48 = \log_b(12\cdot 4) = \log_b 12 + \log_b 4 = 2{,}405$	$\log_b 3 = \log_b(12:4) = \log_b 12 - \log_b 4 = 0{,}683$
$\log_b 144 = \log_b(12^2) = 2\log_b 12 = 3{,}088$	$\log_b 2 = \log_b\sqrt{4} = \frac{1}{2}\log_b 4 = 0{,}4305$
$\log_b \frac{4^5\cdot\sqrt[3]{12}}{b} = \log_b(4^5) + \log_b\sqrt[3]{12} - \log_b b = 5\log_b 4 + \frac{1}{3}\log_b 12 - 1 = 3{,}819666...$	

8. Halla la base en la cual el logaritmo de 125 es 3/2:

$\log_x 125 = 3/2 \rightarrow x^{3/2} = 125 \rightarrow x = 125^{2/3} = \sqrt[3]{125^2} = \left(\sqrt[3]{125}\right)^2 = 5^2 = 25$. La base es 25

9. Utilizando logaritmos, halla x, redondeando con tres decimales:

$10^x = 125$	$x = \log_{10} 125 = 2{,}097$	$3^x = 12{,}3$	$x = \log_3 12{,}3 = 2{,}284$
$5^x = 0{,}341$	$x = \log_5 0{,}341 = -0{,}668$	$e^x = 17$	$x = \ln 17 = 2{,}833$

10. Convierte la siguiente expresión algebraica en una logarítmica:

$A = \frac{x^4y^2}{z}$	$\log A = \log\frac{x^4y^2}{z} = 4\log x + 2\log y - \log z$

11. Convierte la siguiente expresión logarítmica en una algebraica:

$\log B = 3\log x - \log y - 2\log z$	$B = \frac{x^3}{yz^2}$

12. ¿Qué relación existe entre los números A y B si se verifica que $\log_b A + \log_b B = 0$?

$\log_b A + \log_b B = 0 \rightarrow \log_b(A\cdot B) = 0 \rightarrow A\cdot B = 1 \rightarrow B = \frac{1}{A}$. Son dos números inversos.

13. La medida en decibelios de un sonido viene dada por la expresión $B = 10\cdot\log\left(I/10^{-16}\right)$ siendo I la intensidad del sonido medido en watios/m² (log significa logaritmo decimal)

Redondeando a un número entero, ¿cuántos decibelios suponen un susurro de $1{,}37\cdot10^{-14}\ w/m^2$ de intensidad?	$B = 10\cdot\log\left(\frac{1{,}37\cdot10^{-14}}{10^{-16}}\right) = 10\cdot\log 137 = 21$db
Escribiendo el resultado con notación científica, ¿qué intensidad tiene el ruido del motor de un avión (aproximadamente 110 decibelios)?	$110 = 10\cdot\log\left(\frac{I}{10^{-16}}\right) \rightarrow 11 = \log\left(\frac{I}{10^{-16}}\right) \rightarrow$ $\rightarrow 10^{11} = \frac{I}{10^{-16}} \rightarrow I = 10^{-5}\ w/m^2$

14. En la escala de Richter, la magnitud M de un terremoto y la energía E (medida en julios) liberada en él están relacionadas por la expresión $M = \frac{2}{3}\cdot\log\left(\frac{E}{2{,}5\cdot10^4}\right)$

¿Qué energía liberó el terremoto de Valdivia en 1960, considerado el mayor terremoto de la historia, cuya magnitud fue de 9,5 según la escala de Richter? Exprésalo en notación científica con tres cifras decimales

$9{,}5 = \frac{2}{3}\cdot\log\left(\frac{E}{2{,}5\cdot10^4}\right) \rightarrow 14{,}25 = \log\left(\frac{E}{2{,}5\cdot10^4}\right) \rightarrow \frac{E}{2{,}5\cdot10^4} = 10^{14{,}25} \rightarrow E = 2{,}5\cdot10^4\cdot10^{14{,}25} \rightarrow$

$\rightarrow E = 4{,}446\cdot10^{18}$ julios

Sabiendo que la bomba atómica de Hiroshima desprendió una energía de 20 kilotones, ¿cuantas bombas atómicas de su tipo se necesitarían para obtener el efecto destructivo del terremoto chileno? (1 kilotón = $4{,}184 \cdot 10^{12}$ julios)
$4{,}446 \cdot 10^{18} \text{ julios} \cdot \frac{1 \text{ kilotón}}{4{,}184 \cdot 10^{12} \text{ julios}} \cdot \frac{1 \text{ bomba}}{20 \text{ kilotones}} = 53.131 \text{ bombas}$