

Serie 8 - Continuidad y Límites de Funciones - Soluciones

1. Representa una función **par** que cumpla los requisitos indicados:

Domínio = $\mathbb{R}$ Recorrido = $(0,6]$

$$f(0) = 3$$

$$f(1) = 4$$

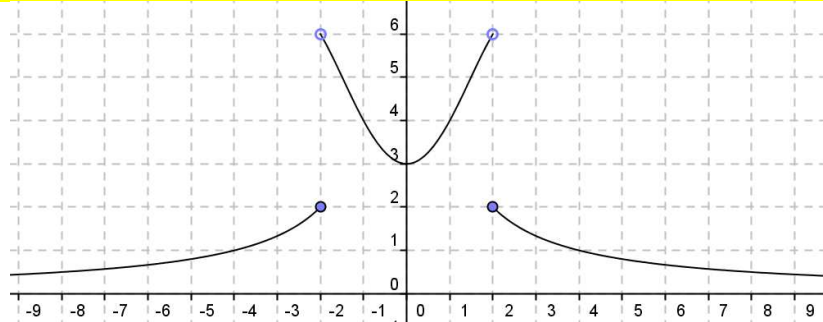
$$f(2^-) = 6$$

$$f(2) = 2$$

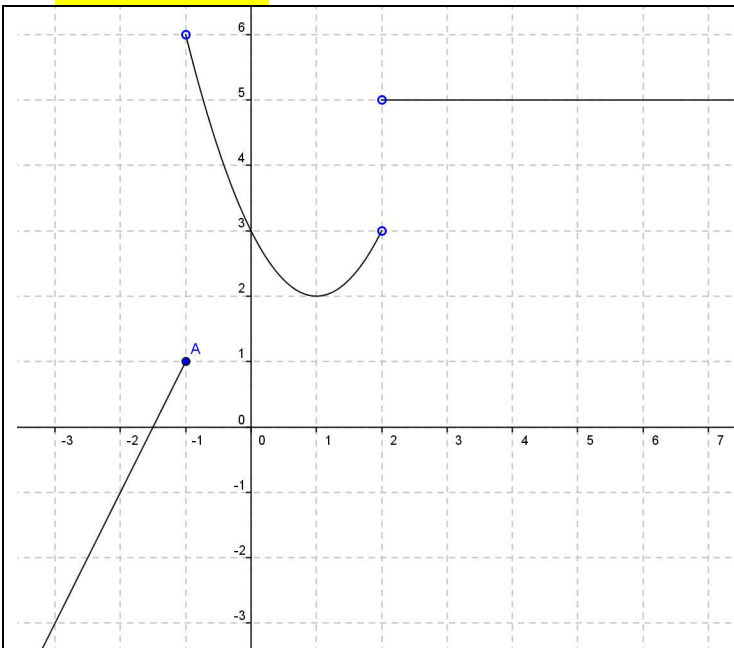
$$f(2^+) = 2$$

$$f(4) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$



2. Contesta las siguientes preguntas referidas a la siguiente función del gráfico, la parte que no se muestra continúa la tendencia indicada:



$$\text{Domínio} = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\text{Recorrido} = (-\infty, 1] \cup (2, 6)$$

$$f(-3) = -3$$

$$f(-1^-) = 1 \quad f(-1) = 1 \quad f(-1^+) = 6$$

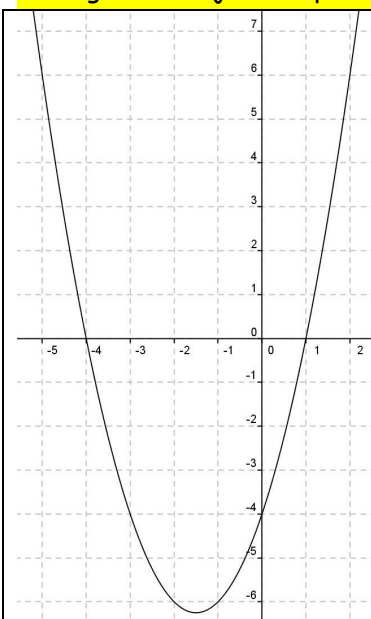
$$f(0) = 3$$

$$f(2^-) = 3 \quad f(2) = \text{No existe} \quad f(2^+) = 5$$

$$f(5) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$$

3. El gráfico adjunto representa la función $y = f(x)$. Sin hacer cálculos contesta las siguientes preguntas:



$$\text{Halla } f(2) = 8$$

$$\text{Resuelve, sin hacer cálculos, } f(x) = 0 \rightarrow x = \begin{cases} -4 \\ 1 \end{cases}$$

$$\text{Resuelve, sin hacer cálculos, } f(x) = 6 \rightarrow x = \begin{cases} -5 \\ 2 \end{cases}$$

$$\text{Resuelve, sin hacer cálculos, } f(x) = -4 \rightarrow x = \begin{cases} -3 \\ 0 \end{cases}$$

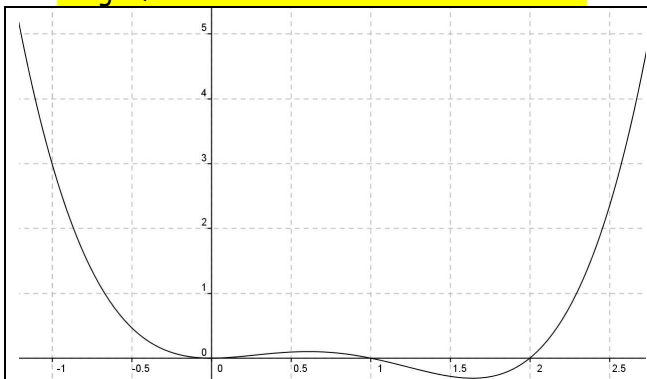
Si sabemos que la ecuación $f(x) = k$ sólo tiene una única solución para x , halla el valor de k : $k = -6$

Si sabemos que la ecuación $f(x) = k$ no tiene ninguna solución para x , escribe en forma de intervalo los posibles valores de k : $k \in (-\infty, -6)$

Sabiendo que la función representada es $f(x) = x^2 + 3x - 4$, resuelve ahora la ecuación $f(x) = 0$ y así comprobar tu primera respuesta:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$$

4. Halla los límites propuestos de las siguientes funciones, teniendo en cuenta que la parte no mostrada de las gráficas continúa la tendencia indicada:

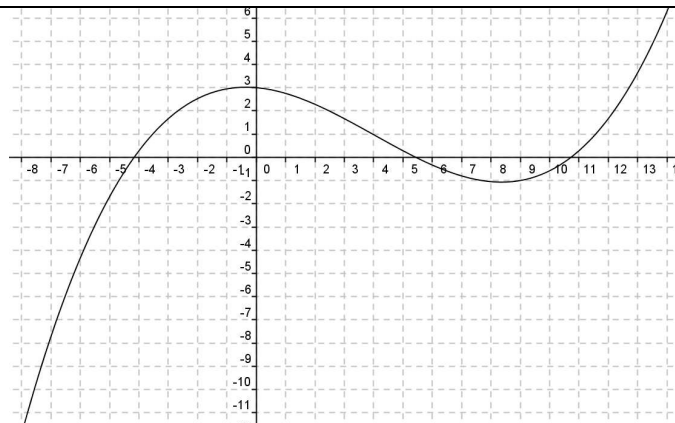


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3$$

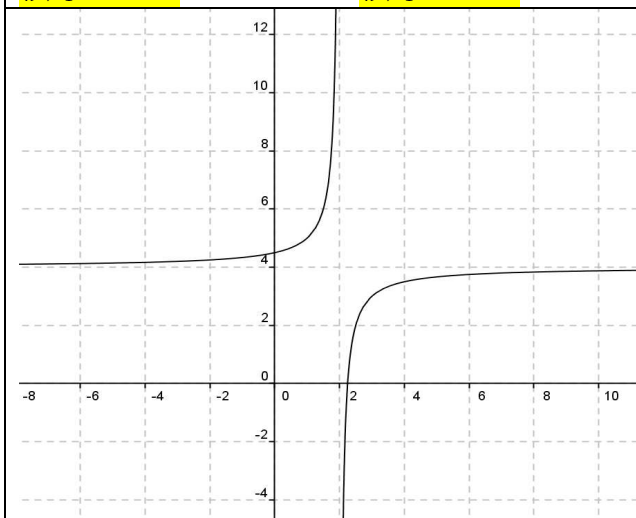
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

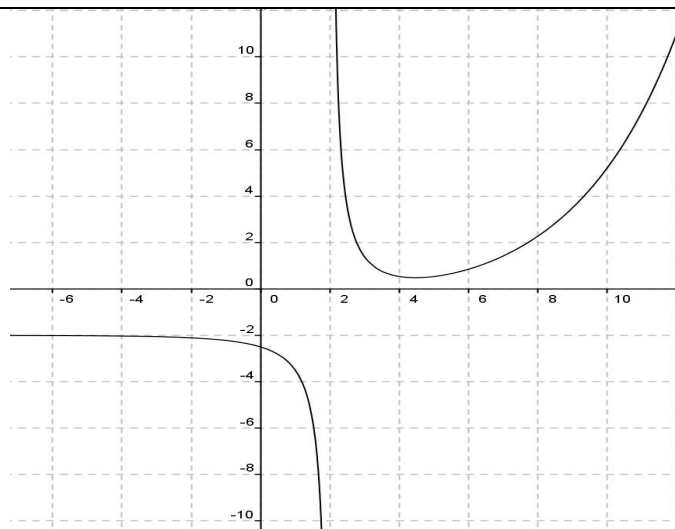


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

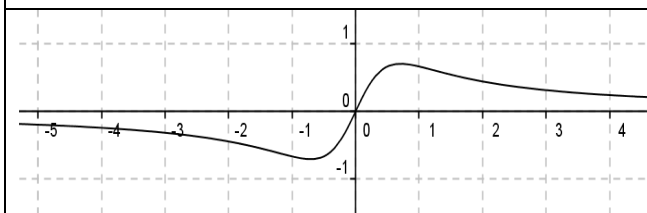


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

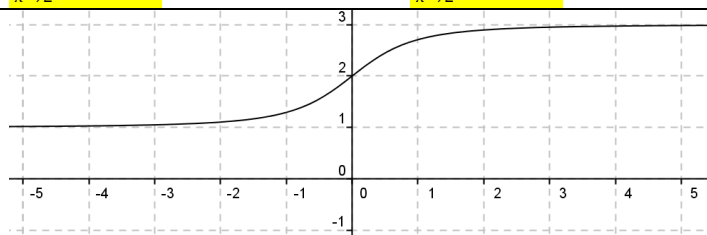
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$



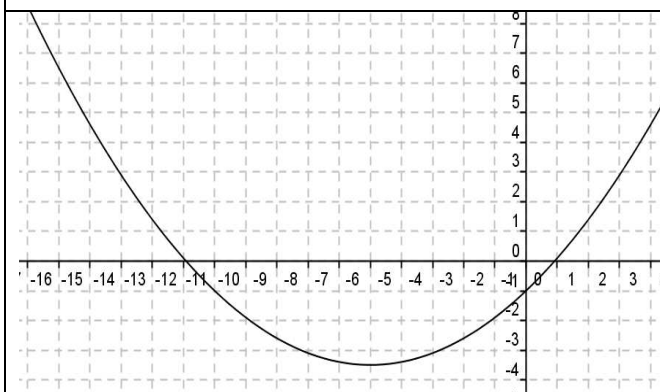
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

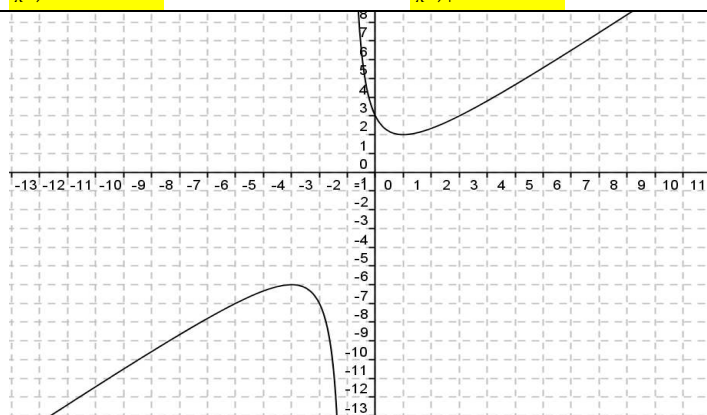


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$$



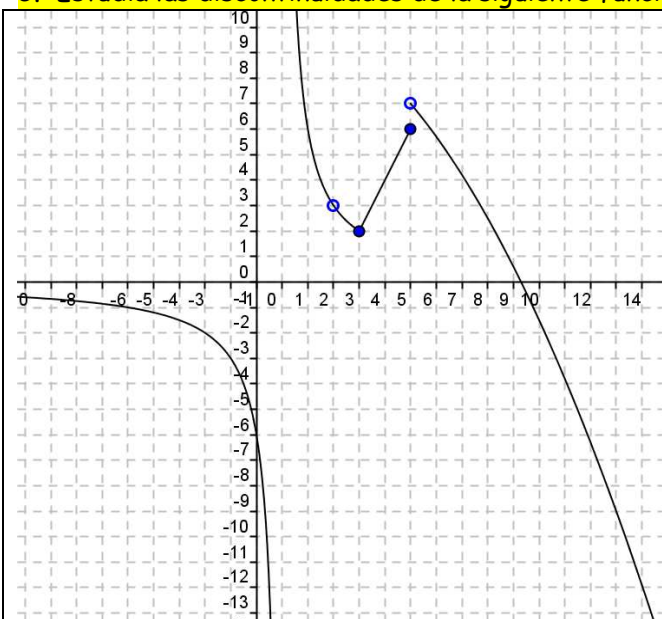
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

5. Estudia las discontinuidades de la siguiente función indicando en qué valores de x se produce y sus tipos:



$$\text{Dominio} = (-\infty, +\infty) - \{1, 3\}$$

$$\text{Recorrido} = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3$$

$$f(3) = \text{No existe}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 2$$

$$f(4) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = 6$$

$$f(6) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = 7$$

$$f(x) \text{ es continua en } (-\infty, +\infty) - \{1, 3, 6\}$$

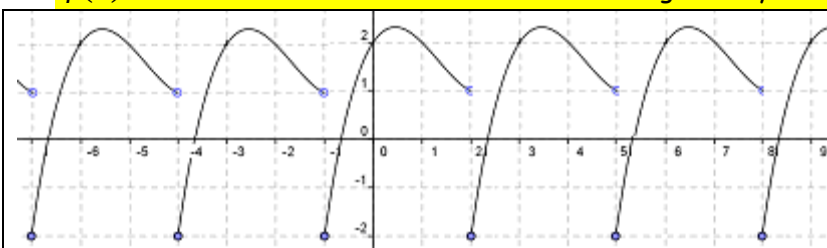
$$f(x) \text{ tiene una discontinuidad de salto infinito en } x=1$$

$$f(x) \text{ tiene una discontinuidad evitable en } x=3$$

$$f(x) \text{ tiene una discontinuidad de salto finito en } x=6$$

6. En el diagrama se observa la gráfica de un periodo completo de una función

$f(x)$. Esboza el resto de la función sobre dicho gráfico y contesta las preguntas que se indican:



$$\text{Periodo} = 3, \text{ el intervalo } [-1, 2]$$

$$f(0) = 2$$

$$f(6) = f(0 + 3 + 3) = 2$$

$$f(-1) = -2$$

$$f(2) = f(-1 + 3) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -2$$

7. Contesta las siguientes preguntas referidas a la siguiente función a trozos y represéntala gráficamente:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -2 \\ 3 & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{4x+2}{3} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Dominio} = (-\infty, +\infty)$$

$$f(-3) = 8$$

$$f(-2) = 3$$

$$f(-1) = 3$$

$$f(1) = 3$$

$$f(4) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{4 \cdot 1 + 2}{3} = 2$$

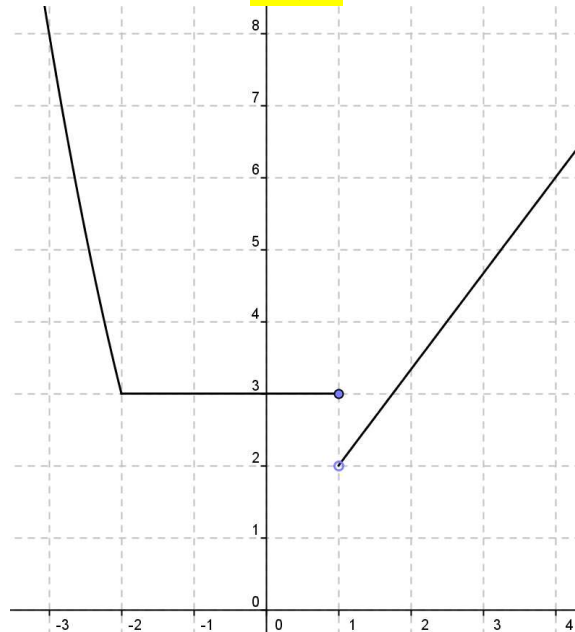
$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = (-2)^2 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 3$$

Tabla de Valores

x	y
-4	15
-3	8
-2^-	3
-2	3
0	3
1	3
1^+	2
4	6
7	10

Gráfica



Discontinuidades

$$f(x) \text{ es continua en}$$

$$(-\infty, +\infty) - \{1\}$$

$$f(x) \text{ tiene una discontinuidad de salto finito en } x=1$$

8. Dada la siguiente función a trozos, halla su dominio, construye una tabla de valores y calcula los límites que consideres oportunos de manera que dispongas en cada trozo de la suficiente información que te permita representarla gráficamente. Estudia sus discontinuidades indicando en qué valores de x se produce y sus tipos.

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{1-x}{x-5} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Dominio y límites

$$\text{Dominio} = (-\infty, +\infty) - \{5\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4 - 1^2 = 3$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{1-3}{3-5} = 1$$

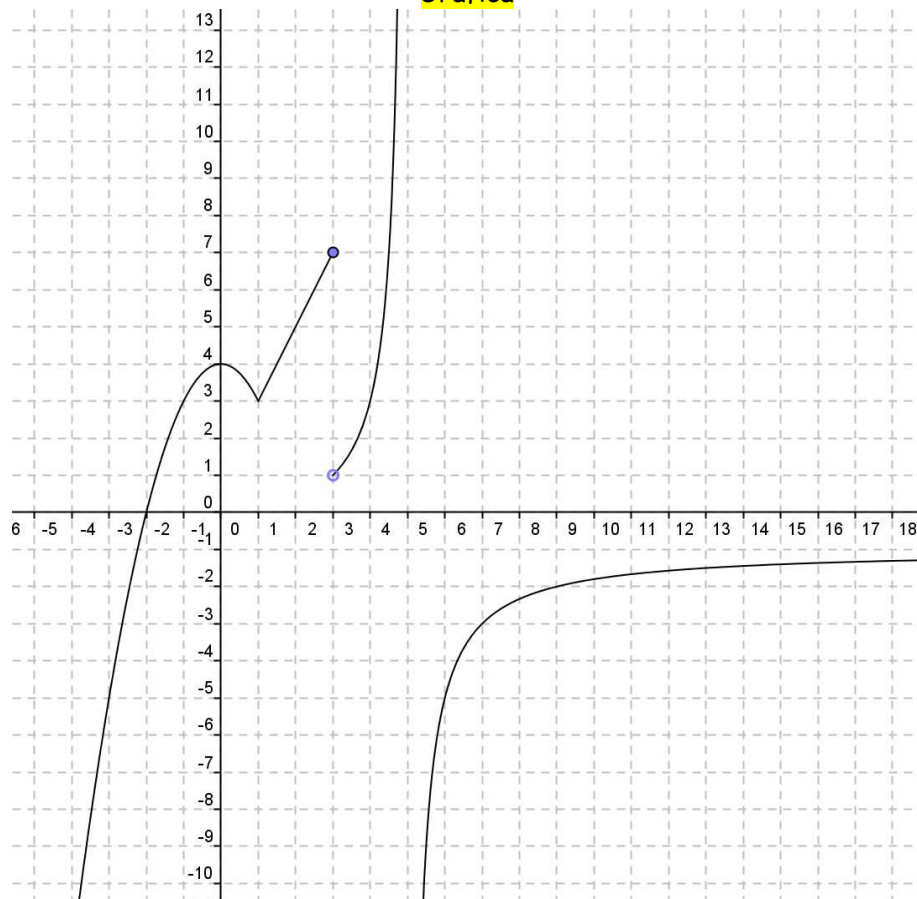
$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \frac{1-5}{5^- - 5} = \frac{-4}{-0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \frac{1-5}{5^+ - 5} = \frac{-4}{+0} = -\infty$$

Tabla de Valores

x	y
-10	-96
-3	-5
-2	0
0	4
1^-	3
1	3
3	7
3^+	1
4	3
4,9	39
5	0
5,1	-5
6	-41
9	-2
15	-1'4
105	-1'04

Gráfica



Discontinuidades

$f(x)$ es continua en $(-\infty, +\infty) - \{3, 5\}$

$f(x)$ tiene una discontinuidad de salto infinito en $x=5$

$f(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x=3$

9. Asocia razonadamente las siguientes gráficas con la expresión de la función que mejor le corresponda según sus características:

$$f_1(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$f_2(x) = -x + 3$$

$$f_3(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$f_4(x) = \frac{1}{2-x}$$

$$f_5(x) = x^3 - x$$

$$f_6(x) = x - 3$$

Función: f_4	Función: f_6	Función: f_3	Función: f_1	Función: f_2	Función: f_5
Explicación: El denominador de f_4 se anula en $x=2$ y esta gráfica tiene un salto infinito en $x=2$	Explicación: La gráfica es una recta creciente y f_6 es una función polinómica de primer grado con pendiente positiva (1)	Explicación: La gráfica es una parábola con vértice en $x=-2$ y f_3 es una función polinómica de segundo grado con vértice en $x=-4/2=-2$	Explicación: La gráfica es una parábola con vértice en $x=2$ y f_1 es una función polinómica de segundo grado con vértice en $x=-(-4)/2=2$	Explicación: La gráfica es una recta decreciente y f_2 es una función polinómica de primer grado con pendiente negativa (-1)	Explicación: La gráfica tiene una simetría impar y f_5 lo es.

10. En un hipermercado, el aparcamiento es gratis en las dos primeras horas. A partir de ese momento, nos cobran 2 céntimos por cada minuto de estancia. Construye una tabla para estancias de hasta cuatro horas y con ella representa la función correspondiente. ¿Cuál sería la expresión de esta función?

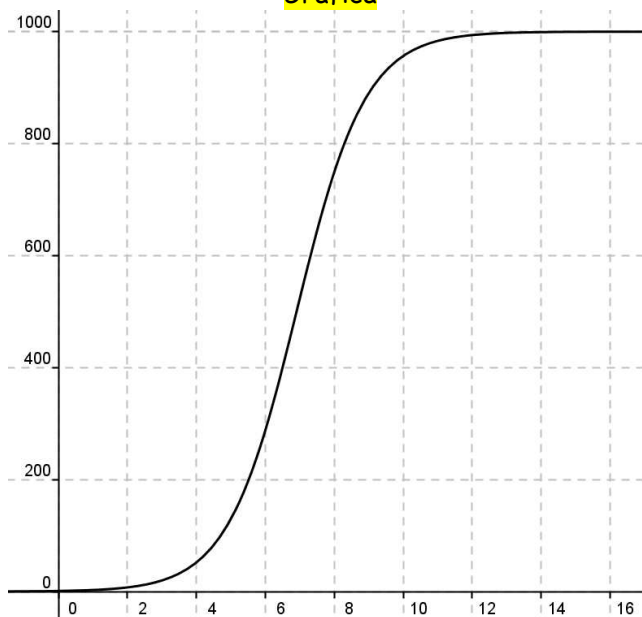
Tabla de Valores <table border="1"> <thead> <tr> <th>X (min)</th><th>Y (€)</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td><td>0</td></tr> <tr> <td>120</td><td>0</td></tr> <tr> <td>121</td><td>0,02</td></tr> <tr> <td>180</td><td>1,20</td></tr> <tr> <td>240</td><td>2,40</td></tr> </tbody> </table>	X (min)	Y (€)	0	0	120	0	121	0,02	180	1,20	240	2,40	Gráfica
X (min)	Y (€)												
0	0												
120	0												
121	0,02												
180	1,20												
240	2,40												
Expresión $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 120 \\ 0,02(x - 120) & \text{si } x \geq 120 \end{cases}$													

10. Supongamos que un alumno es portador del virus de la gripe y regresa a su centro educativo, donde hay 1000 estudiantes. Poco a poco, se van contagiando sus compañeros de clase que a su vez propagan el contagio por todo el centro. La función que representa la situación es $y = \frac{1000}{1 + 999e^{-x}}$ siendo x el nº de días transcurridos desde que el portador regresa a su centro educativo y la variable y el número total de alumnos contagiados. Construye una tabla con valores de hasta 11 días y con ella representa la función correspondiente. Comprueba que el ritmo de contagios empieza y termina muy suave pero es muy rápido del 4º al 8º día. ¿Era previsible este perfil?

Tabla de Valores

x	y
0	1
1	2,71
2	7,34
3	19,71
4	51,82
5	129,35
6	287,66
7	523,29
8	748,99
9	890,24
10	956,61
11	983,59
12	993,90
13	997,75
14	999,17

Gráfica



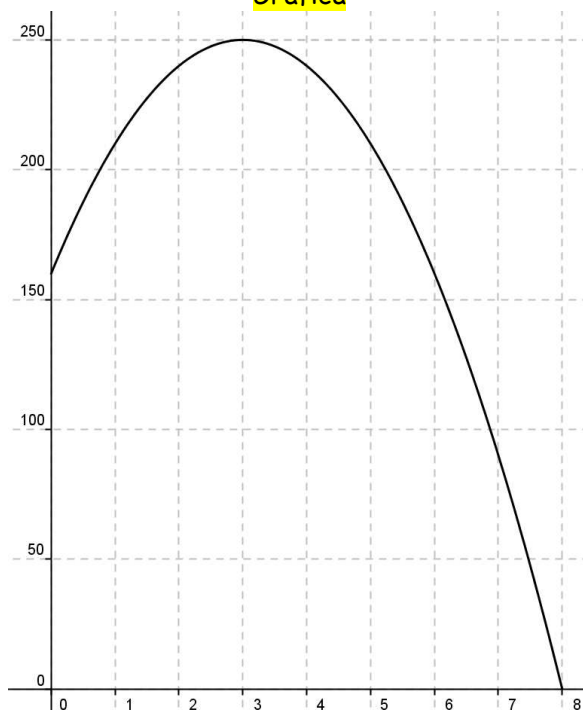
Se podía prever este perfil. Al producirse el contagio de persona a persona, al principio aumenta muy lentamente, pero cuando el número de contagiados empieza a ser alto, el ritmo de nuevos contagios aumenta vertiginosamente. Llega un momento en el que es difícil encontrar nueva gente a la que contagiar, de ahí que al final el ritmo se ralentice hasta la horizontal.

11 El número de miembros de una peña deportiva fundada en 2006 es, x años después de su fundación sigue la función: $f(x) = 160 + 60x - 10x^2$ para $x \geq 0$. Représentalo gráficamente y a la vista de la gráfica contesta a las siguientes preguntas:

Tabla de Valores

x	y
0	160
1	210
2	240
3	250
4	240
5	210
6	160
7	90
8	0

Gráfica



a) ¿En qué año tuvo el máximo número de miembros desde su fundación hasta hoy?

Al tercer año desde su fundación, es decir, en el 2009. Exactamente 250 socios.

b) ¿Cuál es la tendencia actual, creciente o decreciente?

Al 2013 le corresponde $x=7$. El perfil es claramente decreciente.

c) ¿Llegará a quedarse sin socios?

Sí, en $x=8$, lo que significa el año que viene.