80. **Página 176**

a) $y = x^3 + 3x^2 - 5x + 1 \rightarrow y' = 3x^2 + 6x - 5 \rightarrow y'' = 6x + 6$

$y''(x) = 0 \rightarrow x = -1$

$\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

$y''(x) > 0$ en el intervalo $(-1, +\infty) \rightarrow y$ es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x) < 0$ en el intervalo $(-\infty, -1) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

b) $y = x^4 - 6x^2 \rightarrow y' = 4x^3 - 12x \rightarrow y'' = 12x^2 - 12$

$y''(x) = 0 \rightarrow x = \pm 1$

$\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

$y''(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y$ es cóncava en dicho conjunto de intervalos.

$y''(x) < 0$ en el intervalo $(-1, 1) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1} \rightarrow y' = \dfrac{-2x}{(x^2 - 1)^2} \rightarrow y'' = \dfrac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$ $\qquad$ $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$y''(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$y''(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y$ es cóncava en dicho conjunto de intervalos.

$y''(x) < 0$ en el intervalo $(-1, 1) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

d) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2} \rightarrow y' = \dfrac{x^3 + 2}{x^3} \rightarrow y'' = -\dfrac{6}{x^2}$

$y''(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow y$ es convexa en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

e) $y = \sqrt{x^2 + 4} \rightarrow y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \rightarrow y'' = \dfrac{4}{(x^2 + 4)^{3/2}}$ $\qquad$ $\text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

$y''(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $y'' > 0 \ \forall x \rightarrow y$ es cóncava en toda la recta real.

f) $y = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{2} \rightarrow y' = -\dfrac{x}{2\sqrt{4 - x^2}} \rightarrow y'' = -\dfrac{2}{(4 - x^2)^{3/2}}$ $\qquad$ $\text{Dom}\, y = [-2, 2]$

$y''(x) \neq 0 \ \forall x \in (-2, 2)$

$y'' < 0$ en $(-2, 2) \rightarrow y$ es convexa en $(-2, 2)$.

$y'' > 0$ en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \rightarrow y$ es cóncava en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

g) $y = 1 - 2\ln x \rightarrow y' = -\dfrac{2}{x} \rightarrow y'' = \dfrac{2}{x^2}$ $\qquad$ $\text{Dom}\, y = (0, +\infty)$

$y''(x) \neq 0 \ \forall x \in (0, +\infty)$

$y'' > 0$ para todo $x > 0 \rightarrow y$ es cóncava en todo su dominio.

h) $y = \ln(x^2 - x)$ $\qquad$ $\text{Dom}\, y = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$y' = \dfrac{2x - 1}{x^2 - x} \rightarrow y''(x) = \dfrac{2(x^2 - x) - (2x - 1)^2}{(x^2 - x)} = \dfrac{-2x^2 + 2x - 1}{x^2(x - 1)^2}$

$y''(x) \neq 0 \ \forall x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$y'' < 0$ en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \rightarrow y$ es convexa en todo su dominio.

i) $y=\frac{\ln x}{x} \rightarrow y'=\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2} \rightarrow y''=\frac{-3}{x^3}+\frac{2\ln x}{x^3}$ $\quad$ $\text{Dom}\, y=(0,+\infty)$

$y''=0 \rightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$

$y''(x)>0$ en el intervalo $\left(e^{\frac{3}{2}},+\infty\right) \rightarrow y$ es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x)<0$ en el intervalo $\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

j) $y=(x-1)e^x \rightarrow y'=xe^x \rightarrow y''=(x+1)e^x$ $\quad$ $\text{Dom}\, y=\mathbb{R}$

$y''=0 \rightarrow x=-1$

$y''(x)>0$ en el intervalo $(-1,+\infty) \rightarrow y$ es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x)<0$ en el intervalo $(-\infty,-1) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

k) $y=\frac{x}{e^x} \rightarrow y'=\frac{1-x}{e^x} \rightarrow y''=\frac{x-2}{e^x}$ $\quad$ $\text{Dom}\, y=\mathbb{R}$

$y''=0 \rightarrow x=2$

$y''(x)>0$ en el intervalo $(2,+\infty) \rightarrow y$ es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x)<0$ en el intervalo $(-\infty,2) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

l) $y=1+2\,\text{sen}x \rightarrow y'=2\cos x \rightarrow y''=-2\,\text{sen}x$ $\quad$ $\text{Dom}\, y=\mathbb{R}$

Estudiamos la función en $(-\pi,\pi)$ por ser periódica de período 2π.

$y''=0 \rightarrow x=0$

$y''(x)>0$ en el intervalo $(-\pi,0) \rightarrow y$ es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x)<0$ en el intervalo $(0,\pi) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

m) $y=\cos 2x \rightarrow y'=-2\,\text{sen}2x \rightarrow y''=-4\cos 2x$ $\quad$ $\text{Dom}\, y=\mathbb{R}$

Estudiamos la función en $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ por ser periódica de período π.

$y''=0 \rightarrow x=-\frac{\pi}{4}, x=\frac{\pi}{4}$

$y''(x)>0$ en $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow y$ es cóncava en dicho conjunto de intervalos.

$y''(x)<0$ en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

n) $y=\text{sen}^2 x \rightarrow y'=\text{sen}2x \rightarrow y''=2\cos 2x$ $\quad$ $\text{Dom}\, y=\mathbb{R}$

Estudiamos la función en $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ por ser periódica de período π.

$y''=0 \rightarrow x=-\frac{\pi}{4}, x=\frac{\pi}{4}$

$y''(x)>0$ en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow y$ es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x)<0$ en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.