70. Página 176

$y(x) = ax^2 + bx + c$

La función pasa por $(1,0)$ y $(0,-2) \rightarrow 0 = a + b + c$ y $-2 = c$.

Además, tiene un mínimo relativo en $x = \frac{3}{2} \rightarrow y'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.

$y'(x) = 2ax + b \rightarrow 2a\frac{3}{2} + b = 0 \rightarrow 3a + b = 0$

Tenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + b = 0 \\ c = -2 \end{cases} \rightarrow a = -1 \text{ , } b = 3 \text{ , } c = -2 \rightarrow y(x) = -x^2 + 3x - 2$$

A continuación estudiamos la monotonía de la función:

$y'(x) = -2x + 3 \qquad y'(x) = 0 \rightarrow -2x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

En $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$: $y'(x) > 0 \rightarrow y(x)$ creciente en este intervalo.

En $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$: $y'(x) < 0 \rightarrow y(x)$ decreciente en este intervalo.

En $x = \frac{3}{2}$ está el único máximo relativo de la función.

71. Página 176

a) $y = x^3 + ax \qquad y'(x) = 3x^2 + a$

Como existe un extremo relativo en $x = 2 \rightarrow y'(2) = 0$:

$3 \cdot 2^2 + a = 0 \rightarrow a = -12$

Es decir, $y(x) = x^3 - 12x$.

b) $y(x) = x^3 - 12x \qquad y'(x) = 3x^2 - 12 \qquad y''(x) = 6x$

$y'(x) = 0 \rightarrow a = \pm 2$

$y''(2) = 12 > 0 \qquad y''(-2) = -12 < 0$

Es decir:

- $x = 2$ es un mínimo relativo y $x = -2$ es un máximo relativo.
- $y(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y decreciente en $(-2, 2)$.

72. Página 176

$y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y(0) = 0 \quad \rightarrow d = 0$

$y(1) = \frac{5}{6} \rightarrow a + b + c + d = \frac{5}{6} \rightarrow 6a + 6b + 6c = 5$

$y'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$y(x)$ tiene máximo en $x = 1 \rightarrow 3a + b + c = 0$.

$y(x)$ tiene mínimo en $x = 2 \rightarrow 12a + 4b + c = 0$.

Por tanto, tenemos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$\begin{cases} 6a + 6b + 6c = 5 \\ 3a + b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \rightarrow a = -\frac{5}{12},\ b = \frac{5}{4},\ c = 0 \text{ y } d = 0$$

73. Página 176

a) $y = \frac{ax^2 + x + b}{x^2 + 1}$

$y' = \frac{2ax - 2bx - x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$

Tiene un máximo en $x = -1 \rightarrow y'(-1) = 0 = \frac{-2a + 2b}{4} \rightarrow a = b$.

Pasa por $P\left(-2, \frac{13}{5}\right) \rightarrow y(-2) = \frac{13}{5} = \frac{4a - 2 + b}{5} \rightarrow 4a - 2 + b = 13$.

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a = b \\ 4a + b - 15 = 0 \end{cases} \rightarrow a = b = 3$$

Por tanto, la función es $y = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$.

b) Estudiamos la monotonía de la función:

El dominio es toda la recta real.

$y'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

$y'(x) = 0 \rightarrow 1 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $y'(x) < 0 \rightarrow y(x)$ decreciente en este conjunto de intervalos.

En $(-1, 1)$, $y'(x) > 0 \rightarrow y(x)$ creciente en este intervalo.

En $x = -1$ existe el único mínimo relativo de la función y en $x = 1$, el único máximo relativo.

74. Página 176

$$f(x)=\frac{a^2x}{2x^2-5ax+2a^2} \rightarrow f'(x)=\frac{2a^2(a^2-x^2)}{(2x^2-5ax+2a^2)^2}$$

$f(x)$ tiene extremo relativo en $x=2 \rightarrow f'(2)=0=\frac{2a^2(a^2-4)}{(8-10a+2a^2)^2}$.

La anterior identidad se verifica si $2a^2(a^2-4)=0 \rightarrow a=0$ y $a=\pm 2$.

Por tanto, $a=\pm 2$, ya que en el enunciado se pide descartar la solución $a=0$.

- Si $a=-2$:

  $2x^2+10x+8=0 \rightarrow x^2+5x+4=0 \rightarrow x_1=-4, x_2=-1$

  Así, $\text{Dom} f=\mathbb{R}-\{-4,-1\}$.

- Si $a=2$:

  $2x^2-10x+8=0 \rightarrow x^2-5x+4=0 \rightarrow x_1=4, x_2=1$

  Así, $\text{Dom} f=\mathbb{R}-\{1,4\}$.

75. Página 176

$$y=\frac{x^2+ax+b}{x^2+ax+c} \rightarrow y'(x)=\frac{(2x+a)(c-b)}{(x^2+ax+c)^2}$$

Tiene un extremo relativo en $P(2,-1) \rightarrow y'(2)=0 \rightarrow \frac{(4+a)(c-b)}{(4+2a+c)^2}=0 \rightarrow (a+4)(c-b)=0$.

Pasa por el punto (2, −1) $\rightarrow y(2)=-1 \rightarrow \frac{4+2a+b}{4+2a+c}=-1 \rightarrow 4a+b+c=-8$.

Pasa por el origen $\rightarrow y(0)=0=\frac{b}{c} \rightarrow b=0$ y $c\neq 0$.

Resolviendo el sistema: $\begin{cases}(4+a)(c-b)=0\\ 8+4a+b+c=0\\ b=0\end{cases} \rightarrow a=-4,\ b=0$ y $c=8$

76. Página 176

$$y(x)=x\cdot e^{ax} \rightarrow y'(x)=e^{ax}+ax\cdot e^{ax}=e^{ax}(1+ax)$$

Tiene un extremo relativo en $x=1 \rightarrow e^{a}(1+a)=0 \rightarrow a=-1$.

Así, $y(x)=x\cdot e^{-x}$.