

① a) $5 \times 7 \times 2 \times 6$ y $5 \times 7 \times 3 \times 5$ para no repetir ni fila ni columna

b) Los sumandos que incluyen el 0 son:

$$0 \times 4 \times 4 \times 13, 0 \times 4 \times 7 \times 15, 0 \times 6 \times 1 \times 13, 0 \times 6 \times 7 \times 8, 0 \times 11 \times 1 \times 15, 0 \times 11 \times 14 \times 8$$

En Total: Ses sumandos nulos

② a) Desarrollando por la 4ª fila:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -0 + 0 - 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 = -6 \cdot (6 - 15 - 9) = \boxed{108}$$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 108$ ya fue: $|A| = |A^t|$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{-108}$ ya fue están permutadas las dos 1ªs filas

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 108 = \boxed{216}$$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 0$ ya fue son proporcionales la 1ª y 4ª filas

③ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^2 + 4x - 3$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0; \quad x^2 - 4x + 3 = 0; \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 3, 1$$

a) A tiene inversa si: $x \neq 3, x \neq 1$

b) $x = 2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $|A| = -4 + 8 - 3 = 1$

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 12 \\ A_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -8 \end{array} \right.$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \\ A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \end{array} \right.$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \\ A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \end{array} \right.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

comprobación: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$

$$④ \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow r(M) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 + 9 + 3 - 18 + 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 10 + 18 - 5 = 0$$

$$\rightarrow \boxed{r(M) = 2}$$

⑤

$$|A^3| = |A \cdot A \cdot A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = |A|^3 = 5^3 = \boxed{125}$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

$$|-A| = |(-1)A| = (-1)^3 \cdot |A| = -1 \cdot 5 = \boxed{-5}$$

$$|2A| = 2^3 \cdot |A| = 8 \cdot 5 = \boxed{40}$$

$$|B^{-1} \cdot B^t| = |B^{-1}| \cdot |B^t| = \frac{1}{|B|} \cdot |B| = \boxed{1}$$

$$|B \cdot A \cdot B^{-1}| = |B| \cdot |A| \cdot \frac{1}{|B|} = \boxed{5}$$

⑥

a) FALSO . Por ejemplo: $\left| \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -17$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -13 + 6 = -7$$

b) FALSO . Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

De hecho, queda multiplicado por 3^2 , no por 3.

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 18 & 15 \end{vmatrix} = 36$$

c) FALSO . Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 14 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 14 \end{vmatrix} = 4$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -12 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 20 & -12 \\ 12 & -7 \end{vmatrix} = 4$$

Es decir: $A \cdot B \neq B \cdot A$ casi siempre, pero $|A \cdot B| = |B \cdot A|$ siempre
ya que: $|AB| = |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A| = |B \cdot A|$

d) FALSO . Una matriz rectangular no tiene determinante

e) FALSO . Por ejemplo: $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 14 \\ 35 & 26 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 25 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\text{Cumpliéndose: } |M|^2 = |M^2|$$

f) CIERTO La razón es: $|M|^2 = |M| \cdot |M| = |M \cdot M| = |M^2|$

Ejemplo anterior: $M^2 = \begin{pmatrix} 19 & 14 \\ 35 & 26 \end{pmatrix} \rightarrow |M^2| = \begin{vmatrix} 19 & 14 \\ 35 & 26 \end{vmatrix} = 4$

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow |M|^2 = 2^2 = 4$$

g) FALSO Podría hacerse si el producto resultase una matriz cuadrada.
Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (3 \ 4) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$
 $\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (3 \ 4) \right| = \left| \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \right| = 0$

h) FALSO Siempre se pueden hallar todos los adjuntos en una matriz cuadrada. Que no tenga inversa depende únicamente de sea nulo o no el determinante de la matriz.

i) CIERTO. Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ que es singular porque $|A| = 0$
 $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ una matriz invertible.
 $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 42 & 15 \end{pmatrix}$
 $A \cdot B$ es singular porque $|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 14 & 5 \\ 42 & 15 \end{vmatrix} = 0$
La razón es que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$, por lo que si $|A| = 0$ también sería nulo $|A \cdot B|$.