① $a_{ij} = i-j \quad \begin{pmatrix} i=1,2 \\ j=1,2,3,4,5 \end{pmatrix}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

② $XBA - XA = I$

$X(BA-A) = I \rightarrow X = I\cdot(BA-A)^{-1} = \boxed{(BA-A)^{-1}}$

También:

$X(B-I)A = I \rightarrow \boxed{X = A^{-1}\cdot(B-I)^{-1}}$

③ $AX = X - B^t \;;\quad AX - X = -B^t \;;\quad (A-I)X = -B^t \;;\quad X = -(A-I)^{-1}\cdot B^t$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F3=F1-F3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F1=2F1-F3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \; F_1 = -F1/2 \;\; F3 = F3/2 \;\; F2 = -F2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$(A-I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = -\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3/2 & 3/2 \\ 1 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}}$$

④ $A^{-1}X = B \Rightarrow X = (A^{-1})^{-1}\cdot B = A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -15 \\ 5 \end{pmatrix}}$

⑤ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3\cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

$\boxed{A^{100} = \begin{pmatrix} 101 & -100 \\ 100 & -99 \end{pmatrix}}$

⑥ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \;;\; B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$

$3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F2=2F1-F2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F1=F1-2F2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

Comprobación: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow (A\cdot B)^{1000} = I^{1000} = \boxed{I}$

(7)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3 = 3F1-F3]{F2 = 2F1-F2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 10 & -6 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F4 = F2-F4]{F3 = 2F2-F3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{rango} = 2}$$

(8)

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & - \\ -18 & 19 \end{pmatrix}$$

$$M^2 - 6M + KI = 0$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -18 & 19 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -18 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5+K & 0 \\ 0 & -5+K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{K=5}$$

(9)

$$A(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$$

$$A\cdot(B+C) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -4 & 10 & -1 \\ 0 & -4 & -6 \\ -3 & -2 & -15 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -10 & 5 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \\ -17 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$+$

$$A\cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 5 \\ 6 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \\ 14 & -1 & -11 \end{pmatrix}$$

(10) Significa que los elementos de la 3ª fila son iguales a una combinación lineal de la 1ª y 2ª filas.

Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Esta 3ª fila depende linealmente de las dos primeras filas porque coincide con el doble de la 1ª menos la 2ª. ($F3 = 2F1 - F2$)

(11)

$$A\cdot(B-C)\cdot D = 3\cdot E$$

$$(3\times 2)\cdot(m\times n)\cdot(4\times 1) = (p\times q)$$

B, C tienen que ser (2×4)

E " " " (3×1)

(12) a) FALSO. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 14 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}$$

Sí importa el orden de los factores

b) FALSO. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ No puede hacerse

c) FALSO. Podría salir lo mismo. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$