

a)  $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$   $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -2 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$  ( $A^*$  no puede tener rango  $> 2$ )

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$   
 $r(A^*) = 2$   
 $n = 2$   $\Rightarrow$  **S. Compatible Determinado**

$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{28}{7} = \boxed{4}$

$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{14}{7} = \boxed{2}$

$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$  es la solución

b)  $3x - y = 4$

$A = (3 \ -1)$

$A^* = (3 \ -1 \ 4)$  ( $A^*$  no puede tener rango  $> 1$ )

$|3| = 3 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 1$   
 $r(A^*) = 1$   
 $n = 2$   $\Rightarrow$  **S. Compatible Indeterminado**

$\boxed{3x} - y = 4 \rightarrow 3x = 4 + y$   
 $y = \text{cualquier n}^\circ \text{ real}$   
 $\begin{cases} x = \frac{4+y}{3} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$  son las soluciones

c)  $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$|A| = 6 - 6 = 0 \rightarrow r(A) < 2$

$|2| = 2 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 1$

$A^* = \begin{pmatrix} \boxed{2} & -6 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(A^*) = 1$   
 $n = 2$

**Sist. Compatible Indetermin.**

$\begin{cases} \boxed{2x} - 6y = -2 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$

$2x = 6y - 2$   
 $\begin{cases} x = 3y - 1 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$  son las soluciones

d)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$

$A^* = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$|A^*| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 10 - 10 - 5 + 16 + 5 = 0 \Rightarrow r(A^*) = 2$   
 $n = 3$   $\Rightarrow$  **S. Compatible Determinado**

$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x + y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$

$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{15}{5} = \boxed{3}$

$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-5}{5} = \boxed{-1}$

$\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$  es la solución

e)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$

$A^* = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

$|A^*| = 9 - 10 - 12 + 3 - 12 + 30 = 8 \neq 0 \Rightarrow r(A^*) = 3$

**S. Incompatible**

f)  $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ;  $\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$ ;  $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(A) < 2$ ;  $|6| \neq 0 \Rightarrow r(A) = 1$

$A^* = \begin{pmatrix} \boxed{6} & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$   $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \Rightarrow r(A^*) = 2$

Sistema Incompatible

g)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$|A| = 12 + 6 - 6 - 12 = 0 \Rightarrow r(A) < 3$ ;  $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ ;  $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$

$A^* = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & -1 & 1 \\ \boxed{3} & 2 & \boxed{0} & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 + 6 - 12 = 0 \Rightarrow r(A^*) = 2$

$m = 3$

Sistema Compatible Indeterminado

$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 3x + 2y = 2 \\ -3x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x - z = 1 - 2y \\ 3x = 2 - 2y \end{cases}$

$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-2y & -1 \\ 2-2y & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2-2y}{3}$

$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1-2y \\ 3 & 2-2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{6-6y-3+6y}{3} = 1$

$y = \text{cualquier } n^o \text{ real}$

Estas son las infinitas soluciones

h)  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

( $A^*$  no puede tener rango  $> 3$ )

$|A| = -12 + 10 + 1 + 2 - 4 - 15 = -18 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$

$r(A^*) = 3$   
 $m = 3$

S. Compatible Determinado

$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{10 - 2 - 4 - 4}{-18} = 0$

$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -4 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{-12 + 4 + 2 - 6}{-18} = \frac{-12}{-18} = \frac{2}{3}$

$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{-6 - 1 - 2 + 15}{-18} = \frac{6}{-18} = -\frac{1}{3}$

i)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

$|A| = 6 + 6 + 1 - 2 - 9 - 2 = 0 \Rightarrow r(A) < 3$ ;  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$

$A^* = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 & 0 \\ \boxed{3} & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 1 + 6 + 2 = 3 \neq 0 \Rightarrow r(A^*) = 3$

Sistema Incompatible

j)  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$|A| = 12 + 18 + 1 - 4 - 6 - 9 = 12 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$   
 $r(A^*) = 3$   
 $n = 3 \Rightarrow \boxed{\text{S. Compatible Determinado}}$

Al tratarse de un sistema homogéneo, si la solución es única, debe ser la Trivial:  $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

k)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$   $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$|A| = 4 - 6 + 2 = 0 \rightarrow r(A) < 3$

$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} r(A) = 2 \\ r(A^*) = 2 \\ n = 3 \end{cases}$

(con 4ta columna, A y A\* tendrán igual rango.)

$\Rightarrow \boxed{\text{S. Compatible Indeterminado}}$

$\begin{cases} x - 3y - 4z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y + 4z \\ 3y + 4z + 2z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 3y = 4z \\ x = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3y = 4z - 2z \\ -3y = 2z \\ y = -\frac{2}{3}z \end{cases}$

NOTA: También se puede resolver por Cramer.

De estas infinitas soluciones, buscaremos aquella en la que se cumple que:  $x + y + z = 3$

$\Rightarrow -2z - \frac{2}{3}z + z = 3 \Rightarrow \boxed{z = -1} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

l)  $AX = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ x + y \end{pmatrix}$

$3X = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}$

$AX - 3X = \begin{pmatrix} 2x - 2y - 3x \\ x + y - 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - 2y \\ x - 2y \end{pmatrix}$

$AX - 3X = B \Rightarrow \begin{cases} -x - 2y = 2 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{Son la misma ecuación.} \Rightarrow \begin{cases} -x - 2y = 2 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} -x = 2y + 2 \\ y = \text{cualquier } n^{\circ} \text{ real} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y - 2 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ Son las soluciones.}$

Nota: Si se quisiera resolver como ecuación matricial, no

sería posible:  $AX - 3X = B$

$(A - 3I)X = B$

$X = (A - 3I)^{-1} \cdot B$

ya que  $A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  no tiene inversa.

$$m \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & m \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -1 & m & 1 \end{pmatrix} \quad (A^* \text{ no tiene rango } > 2)$$

$$|A| = 2m - 6 \quad ; \quad 2m - 6 = 0 \Rightarrow m = 3$$

$$\bullet \text{ Si } m \neq 3 \Rightarrow \begin{matrix} r(A) = 2 \\ r(A^*) = 2 \\ m = 2 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\text{S. Compatible Determinado.}}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 1 & m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -1 & m \end{vmatrix}} = \frac{-2m + 6}{2m - 6} = \frac{3 - m}{m - 3} = \boxed{-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -1 & m \end{vmatrix}} = \frac{2 - 2}{2m - 6} = \frac{0}{2m - 6} = \boxed{0}$$

Esta es la única solución para cualquier  $m \neq 3$

$$\bullet \text{ Si } \underline{m = 3} : A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|2| = 2 \neq 0 \Rightarrow \boxed{r(A) = 1}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{r(A^*) = 1}$$

$$\boxed{m = 2}$$

$\Rightarrow \boxed{\text{S. Compatible Indeterminado}}$

$$\begin{cases} 2x - 6y = -2 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$2x = 6y - 2$$

$$y = \text{cualquier } n^{\circ} \text{ real}$$

$$\begin{cases} x = 3y - 1 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

son las infinitas soluciones para  $m = 3$

$$m \quad A = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & -m & 2m-1 \end{pmatrix}$$

$(A^* \text{ no puede tener rango } > 2)$

$$|A| = -m^2 + 1 \quad ; \quad -m^2 + 1 = 0 \quad ; \quad m^2 = 1 \quad ; \quad m = \pm 1$$

$$\bullet \text{ Si } m \neq 1 \text{ y } m \neq -1 \Rightarrow \begin{matrix} r(A) = 2 \\ r(A^*) = 2 \\ m = 2 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\text{S. Compatible Determinado para } m \neq \pm 1}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2m-1 & -m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{vmatrix}} = \frac{-m + 2m - 1}{-m^2 + 1} = \frac{m - 1}{-m^2 + 1} = \frac{m - 1}{-(m+1)(m-1)} = \boxed{-\frac{1}{m+1}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 2m-1 \end{vmatrix}}{-m^2 + 1} = \frac{2m^2 - m - 1}{-m^2 + 1} = \frac{2(m-1)(m+1/2)}{-(m+1)(m-1)} = \boxed{-\frac{2m+1}{m+1}}$$

$$\bullet \text{ Si } \underline{m = 1} : A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad |1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{r(A) = 1}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{r(A^*) = 1}$$

$$\boxed{m = 2}$$

$\Rightarrow \boxed{\text{S. Compatible Indeterminado para } m = 1}$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x/y \neq 1 \end{cases}$$

$$x = 1 + y$$

$$y = \text{cualquier } n^{\circ} \text{ real}$$

estas son las infinitas soluciones para  $m = 1$

$$\bullet \text{ Si } \underline{m = -1} : A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad |-1| = -1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{r(A) = 1}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \boxed{r(A^*) = 2}$$

$\Rightarrow \boxed{\text{S. Incompatible para } m = -1}$

0)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow \boxed{r(A)=2}$

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}$

$|A^*| = m - 10 - 10 - 5 + 4m + 5 = 5m - 20$ ;  $5m - 20 = 0 \Rightarrow m = 4$

• Si  $m \neq 4 \Rightarrow \boxed{r(A^*)=3} \rightarrow \boxed{\text{S. Incompatible para } m \neq 4}$

• Si  $\underline{m=4} \Rightarrow \begin{matrix} r(A)=2 \\ r(A^*)=2 \\ n=2 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\text{S. Compatible Determinado para } m=4}$

$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \quad x \neq y = 5/4$

$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{15}{5} = 3$   
 $y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-5}{5} = -1$

Esta es la solución para  $m=4$

1)  $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & m \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{r(A)=2}$

$A^* = \begin{pmatrix} -3 & -2 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & m & 4 \end{pmatrix}$

$|A^*| = -12 + 2m^2 - 3m + 16 = 2m^2 - 3m + 4$ ;  $2m^2 - 3m + 4 = 0$

$m = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 32}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{-23}}{4}$

sin soluciones reales para  $m$ .

En consecuencia, para cualquier valor de  $m$ ,  $\boxed{r(A^*)=3} \rightarrow \boxed{\text{S. Incompatible para todo } m}$

2)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix}$

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{pmatrix}$

( $A^*$  no puede tener rango  $> 3$ )

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} = 9 + 2a + a - 3 - 6 - a^2 = -a^2 + 3a$ ;  $-a^2 + 3a = 0$ ;  $a(-a+3)=0$ ;  $a = \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix}$

• Si  $a \neq 0$  y  $a \neq 3 \Rightarrow \begin{matrix} r(A)=3 \\ r(A^*)=3 \\ n=3 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\text{S. Compatible Determinado}}$

$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & a \\ 2 & a & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix}} = \frac{9 + 3a + 2a - 6 - 9 - a^2}{-a^2 + a} = \frac{-a^2 + 5a - 6}{-a^2 + a} = \frac{-(a-1)(a-6)}{-a(a-1)} = \boxed{\frac{a-6}{a}}$

$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-a^2 + a} = \frac{9 + 4 + a - 3 - 6 - 2a}{-a^2 + a} = \boxed{\frac{4-a}{-a^2 + a}}$

$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}}{-a^2 + a} = \frac{6 + 2a + 3 - 3 - 4 - 3a}{-a^2 + a} = \boxed{\frac{a+2}{-a^2 + a}}$

Esta es la solución única para todos los valores de  $a$  distintos de 0 y 1.

• Si  $a=0$  :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  ;  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{r(A)=2}$  (Ya sabíamos que  $r(A) < 3$ )

$A^* = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & 1 \\ \boxed{2} & \boxed{3} & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  ;  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6+3-3-4 = 2 \neq 0 \Rightarrow \boxed{r(A^*)=3}$

Por lo tanto, el sistema es Incompatible para  $a=0$

• Si  $a=3$  :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  ;  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{r(A)=2}$  (Ya sabíamos que  $r(A) < 3$ )

$A^* = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & 1 \\ \boxed{2} & \boxed{3} & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  ;  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6+2+3-3-4-3 = 1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{r(A^*)=3}$

Por lo tanto, el sistema es Incompatible para  $a=3$

r  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & m & -m \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$   $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & m & -m & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  ( $A^*$  no puede tener rango  $> 3$ )

$|A| = 9 + m - m - 9m = 0$  ;  $9 - 9m = 0 \rightarrow m = 1$

• Si  $m \neq 1 \Rightarrow \begin{matrix} \boxed{r(A)=3} \\ \boxed{r(A^*)=3} \\ n=3 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\text{S. Compatible Determinado para } m \neq 1}$

Como el sistema es homogéneo, si la solución es única debe ser la trivial :  $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$  es la solución para cualquier  $m \neq 1$

• Si  $m=1$  :  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$  ;  $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Rightarrow \boxed{r(A)=2}$   
(Ya sabíamos que  $r(A) < 3$ )

$A^* = \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{-1} & 1 & 0 \\ \boxed{-3} & \boxed{1} & -1 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$   $\boxed{r(A^*)=2}$  (con esta columna nula no puede subir el rango)

$\begin{matrix} r(A)=2 \\ r(A^*)=2 \\ n=3 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\text{S. Compatible Indeterminado para } m=1}$

$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ -3x + y - z = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x - y = -z \\ x - 3y = 0 \end{cases}$   
 $z = \text{cualquier } n^\circ \text{ real}$

$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{3z}{-8} = \boxed{-\frac{3}{8}z}$

$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -z \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-8} = \boxed{-\frac{z}{8}}$

$\boxed{z \in \mathbb{R}}$

Estas son las infinitas soluciones para  $m=1$

$$s) \quad A \cdot B = (x \ y) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ y & 0 \end{pmatrix} = (2x+2y \ -2x)$$

$$A \cdot B - C = (2x+2y+4m \ -2x-y)$$

$$A \cdot B - C = 2D \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y+4m = -2x \\ -2x-y = 2m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x+2y = -4m \\ -2x-y = 2m \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x+y = -2m \\ -2x-y = 2m \end{cases} \rightarrow \text{Son la 'misma' ecuación} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y = -2m \\ -2x-y = 2m \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{cases} y = -2m-2x \\ x = \text{cualquier n}^\circ \text{ real} \end{cases}} \quad \text{Son las infinitas soluciones para cualquier valor de } m$$

$$t) \quad x = n^\circ \text{ monedas de } 50c$$

$$y = n^\circ \text{ monedas restantes (cada una con valor de 'm' céntimos)}$$

$$\begin{cases} x+y = 8 \\ 50x+my = 250 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 50 & m \end{pmatrix}$$

$$|A| = m-50 ; \quad m-50=0 ; \quad m=50$$

$$\bullet \text{ Si } m \neq 50 \Rightarrow \begin{cases} r(A)=2 \\ r(A^*)=2 \\ n=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{S. Compatible Determinado para } m \neq 50.}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 250 & m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 50 & m \end{vmatrix}} = \frac{8m-250}{m-50} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 50 & 250 \end{vmatrix}}{m-50} = \frac{-150}{m-50}$$

$$\bullet \text{ Si } m=50 \rightarrow r(A) < 2 ; \quad |1| = 1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{r(A)=1}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 50 & 50 & 250 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 50 & 250 \end{vmatrix} = -150 \neq 0 \Rightarrow \boxed{r(A^*)=2}$$

$$\boxed{\text{El sistema no tiene solución para } m=50}$$

Nota: En el contexto del problema, tanto  $x$  como  $y$  deben ser enteros positivos ya que significan n.º de monedas.

En consecuencia, decir que "tiene solución para cualquier valor de  $m \neq 50$ " sería falsear la situación, si estudiamos los posibles valores de ' $m$ ' en circulación:

$$\begin{aligned} m=1c &\rightarrow x=4'94, y=3'06 \\ m=2c &\rightarrow x=4'875, y=3'125 \\ m=5c &\rightarrow x=4'6, y=3'3 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} m=10c &\rightarrow x=4'25, y=3'75 \\ m=20c &\rightarrow \boxed{x=3, y=5} \leftarrow \text{Solución} \\ m=1€ &\rightarrow x=11, y=-3 \\ m=2€ &\rightarrow x=9, y=-1 \end{aligned} \right.$$