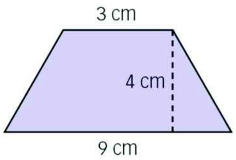
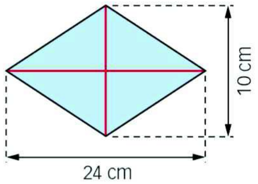
21. **Calcula el área de estas figuras.**

a)



b)



a) $A=\dfrac{(B+b)\cdot h}{2}=\dfrac{(9+3)\cdot 4}{2}=24\ \text{cm}^2$

b) $A=\dfrac{D\cdot d}{2}=\dfrac{24\cdot 10}{2}=120\ \text{cm}^2$

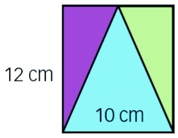
22. **Halla el perímetro y el área de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 4 cm y 7 cm.**

Primero se calcula la hipotenusa del triángulo rectángulo:

$a^2=b^2+c^2\rightarrow a^2=4^2+7^2=16+49=65\rightarrow a=\sqrt{65}=8{,}06\ \text{cm}$

$\text{Perímetro}=4+7+8{,}06=19{,}06\ \text{cm}$ $\text{Área}=\dfrac{b\cdot h}{2}=\dfrac{4\cdot 7}{2}=14\ \text{cm}^2$

23. **Halla el área de cada uno de los tres triángulos que están marcados en la figura que está a la derecha.**

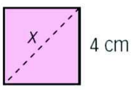


Los triángulos laterales son iguales y su área es: $A=\dfrac{b\cdot h}{2}=\dfrac{12\cdot 5}{2}=30\ \text{cm}^2$.

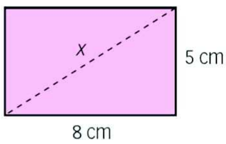
El triángulo central tiene de área: $A=\dfrac{b\cdot h}{2}=\dfrac{12\cdot 10}{2}=60\ \text{cm}^2$.

24. **Calcula la longitud de *x* en las figuras.**

a)



b)



a) $x^2=4^2+4^2=16+16=32\rightarrow a=\sqrt{32}=5{,}66\ \text{cm}$

b) $x^2=5^2+8^2=25+64=89\rightarrow a=\sqrt{89}=9{,}43\ \text{cm}$

25. **Una de las dimensiones de un rectángulo mide 12 cm, y su diagonal mide 20 cm. Halla su área.**

Primero calculamos la otra dimensión:

$20^2=12^2+c^2\rightarrow c=\sqrt{400-144}=\sqrt{256}=16\ \text{cm}$

$A=12\cdot 16=192\ \text{cm}^2$

26 **El perímetro de un rectángulo es 68 cm, y la altura, 24 cm. Calcula.**

a) La diagonal del rectángulo

b) El área del rectángulo

a) Sea x la base del rectángulo, entonces se tiene: $68 = 24 \cdot 2 + x \cdot 2 \rightarrow x = 10$ cm .

Sea y la diagonal del rectángulo, entonces se tiene: $y^2 = 10^2 + 24^2 \rightarrow y = \sqrt{100 + 576} = \sqrt{676} = 26$ cm .

b) $A = 10 \cdot 24 = 240$ cm^2

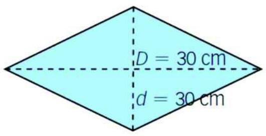
27. Calcula el lado de un cuadrado cuya diagonal mide:

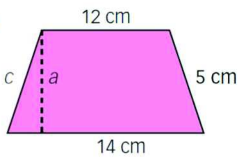
a) 5,3033 cm b) 3,96 cm c) 2,12 cm

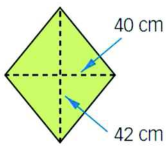
Sea d la diagonal del cuadrado y l el lado. Entonces $d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \rightarrow l = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$.

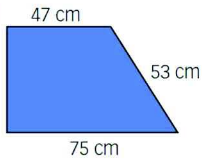
a) $l = \dfrac{5,3033}{\sqrt{2}} = 3,75$ cm b) $l = \dfrac{3,96}{\sqrt{2}} = 2,8$ cm c) $l = \dfrac{2,12}{\sqrt{2}} = 1,5$ cm

28. Calcula el área de estas figuras.

a)


c)


b)


d)


a) $A = \dfrac{30 \cdot 30}{2} = 450$ cm^2

b) $A = \dfrac{40 \cdot 42}{2} = 840$ cm^2

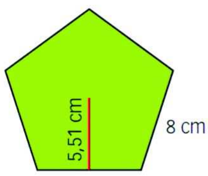
c) Calculamos a: $5^2 = a^2 + 1^2 \rightarrow a = 4,9$ cm

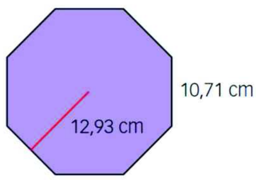
$A = \dfrac{(14 + 12) \cdot 4,9}{2} = 63,7$ cm^2

d) Calculamos a: $53^2 = a^2 + 28^2 \rightarrow a = 45$ cm

$A = \dfrac{(75 + 47) \cdot 45}{2} = 2\,745$ cm^2

29. Calcula el perímetro y el área de estos polígonos regulares.

a)


b)


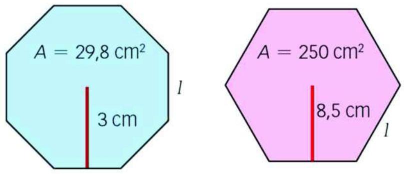
a) Perímetro $= P = 5 \cdot 8 = 40$ cm

Área $= A = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{40 \cdot 5,51}{2} = 110,2$ cm^2

b) Perímetro $= P = 8 \cdot 10,71 = 85,68$ cm

Área $= A = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{85,68 \cdot 12,93}{2} = 553,92$ cm^2

30. Halla el lado de estos polígonos regulares.



OCTÓGONO AZUL:

$$A = 29{,}8\ \text{cm}^2 = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{P \cdot 3}{2} \rightarrow P = \frac{29{,}8 \cdot 2}{3} = 19{,}87\ \text{cm}$$

El lado del octógono es $l = \dfrac{19{,}87}{8} = 2{,}48\ \text{cm}$.

HEXÁGONO ROSA:

$$A = 250\ \text{cm}^2 = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{P \cdot 8{,}5}{2} \rightarrow P = \frac{250 \cdot 2}{8{,}5} = 58{,}82\ \text{cm}$$

El lado del hexágono es $l = \dfrac{58{,}82}{6} = 9{,}8\ \text{cm}$.

31. Determina la altura y el perímetro de un triángulo equilátero de área 2 dm².

La altura del triángulo equilátero, *h,* y el lado *l* del triángulo tienen esta relación:

$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \rightarrow h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{3l^2}{4} \rightarrow h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

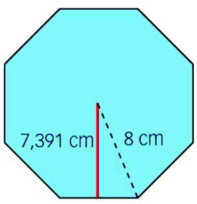
$$A = 2\ \text{dm}^2 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{l \cdot \frac{l}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{l^2}{4}\sqrt{3} \rightarrow l^2 = \frac{2 \cdot 4}{\sqrt{3}} = 4{,}62 \rightarrow l = 2{,}15\ \text{dm}$$

Ahora ya se pueden calcular la altura y el perímetro:

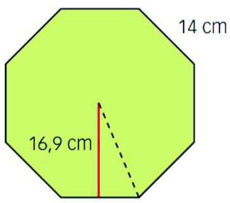
$$h = \frac{l}{2}\sqrt{3} = \frac{2{,}15}{2}\sqrt{3} = 1{,}86\ \text{dm} \qquad P = 3l = 3 \cdot 2{,}15 = 6{,}45\ \text{dm}$$

32. Calcula el área de los siguientes polígonos regulares.

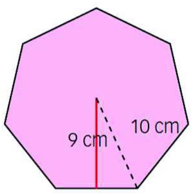
a)



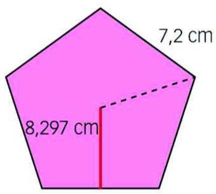
c)



b)



d)



a) En el triángulo rectángulo formado por la apotema, el radio y la mitad del lado, se tiene:

$$8^2 = 7{,}391^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow \frac{l}{2} = \sqrt{64 - 54{,}63} = 3{,}06 \text{ cm} \rightarrow l = 6{,}12 \text{ cm}$$

El área del octógono es $A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6{,}12 \cdot 8 \cdot 7{,}391}{2} = 180{,}93 \text{ cm}^2$.

b) En el triángulo rectángulo formado por la apotema, el radio y la mitad del lado, se tiene:

$$10^2 = 9^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow \frac{l}{2} = \sqrt{100 - 81} = 4{,}36 \text{ cm} \rightarrow l = 8{,}72 \text{ cm}$$

El área del heptágono es $A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{8{,}72 \cdot 7 \cdot 9}{2} = 274{,}68 \text{ cm}^2$.

c) El área del octógono es $A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{8 \cdot 14 \cdot 16{,}9}{2} = 946{,}4 \text{ cm}^2$.

d) El área del pentágono es $A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{7{,}2 \cdot 5 \cdot 8{,}297}{2} = 149{,}346 \text{ cm}^2$.

33. Calcula el área de un octógono regular de 5,2 cm de lado y 6,794 cm de radio.

Se calcula primero la apotema:

$$6{,}794^2 = 2{,}6^2 + a^2 \rightarrow a = \sqrt{6{,}794^2 - 6{,}76} = 6{,}28 \text{ cm}$$

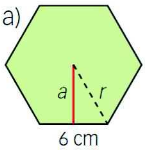
El área es $A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{5{,}2 \cdot 8 \cdot 6{,}28}{2} = 130{,}624 \text{ cm}^2$.

34. Calcula el radio de un pentágono regular de lado 10,8 cm y de apotema 7,43 cm.

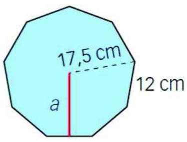
$$r^2 = a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow r = \sqrt{7{,}43^2 + 5{,}4^2} = 9{,}185 \text{ cm}$$

35. Calcula la apotema en estos polígonos regulares.

a)



b)



a) El lado es igual al radio, por tanto se tiene: $r^2 = a^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \rightarrow a = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 5{,}2 \text{ cm}$.

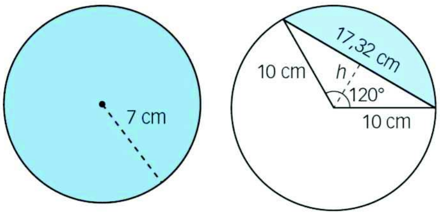
b) $r^2 = a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow a = \sqrt{17{,}5^2 - 6^2} = \sqrt{270{,}25} = 16{,}44 \text{ cm}$

36. Calcula el área de un hexágono regular de 9 cm de apotema.

Se calcula el lado: $l^2 = a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow l^2 = 9^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow 81 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4} \rightarrow l = \sqrt{\frac{81 \cdot 4}{3}} = 10{,}3923 \text{ cm}$.

Se calcula el área: $A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{10{,}3923 \cdot 6 \cdot 9}{2} = 280{,}5921 \text{ cm}^2$

37. **Calcula el área y el perímetro de estas figuras.**



a) $A = \pi r^2 = \pi \cdot 7^2 = 153{,}94\ \text{cm}^2$ y $P = 2\pi r = 14\pi = 43{,}98$ cm

b) Se halla la altura del triángulo. Para ello se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el radio y cuyos catetos son la altura y la mitad de la cuerda *AB*:

$$20^2 = \left(\frac{34{,}64}{2}\right)^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 400 - 299{,}98 \rightarrow h = 10$$

Se calcula el área del triángulo y el área del sector:

$$A_{\text{sector}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = \frac{\pi \cdot 20^2 \cdot 120}{360} = 418{,}67\ \text{cm}^2 \qquad A_{\text{triángulo}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{34{,}64 \cdot 10}{2} = 173{,}2\ \text{cm}^2$$

Se resta el área del triángulo a la del sector para obtener el área del segmento circular:

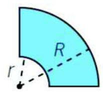
$$A = A_{\text{sector}} - A_{\text{triángulo}} = 418{,}67 - 173{,}2 = 245{,}47\ \text{cm}^2$$

$$P = \frac{2\pi r \alpha}{360} + 34{,}64 = \frac{2\pi \cdot 20 \cdot 120}{360} + 34{,}64 = 41{,}89 + 34{,}64 = 76{,}53\ \text{cm}$$

38. **Calcula el radio del sector circular de amplitud 135° y área 3,817 cm².**

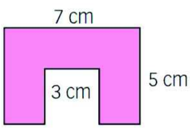
$$A = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360} \rightarrow 3{,}817 = \frac{\pi r^2 \cdot 135}{360} \rightarrow r^2 = \frac{3{,}817 \cdot 360}{\pi \cdot 135} = 3{,}24 \rightarrow r = 1{,}8\ \text{cm}$$

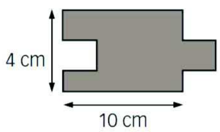
39. **Calcula el área de la zona coloreada de la figura circular en donde $\alpha = 90°$, $r = 3$ cm y $R = 9$ cm.**

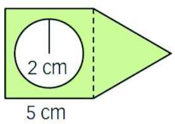


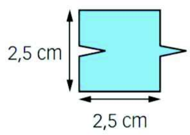
$$A = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360} - \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360} = \frac{\pi\left(R^2 - r^2\right) \cdot \alpha}{360} = \frac{\pi\left(9^2 - 3^2\right) \cdot 90}{360} = 56{,}55\ \text{cm}^2$$

40. **Determina el área de las figuras.**

a) 

b) 

c) 

d) 

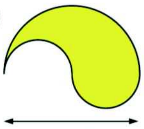
a) $A = 7 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 26\ \text{cm}^2$.

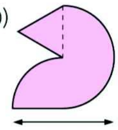
b) $A = 10 \cdot 4 = 40\ \text{cm}^2$.

c) $h = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = 4{,}33 \rightarrow A = 5 \cdot 5 + (5 \cdot 4{,}33)/2 - 4\pi = 23{,}27\ \text{cm}^2$

d) $A = 2{,}5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25\ \text{cm}^2$.

41. **Calcula el área.**

a) 

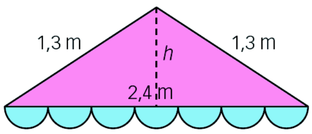
b) 

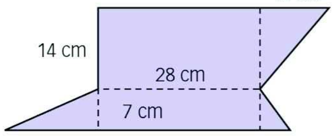
a) Es un semicírculo al que le restamos y le sumamos la misma superficie, luego será el equivalente al área del semicírculo: $A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{36\pi}{2} = 56,55\ \text{cm}^2$.

b) Es un semicírculo más un cuarto de círculo, es decir, tres cuartos de círculo más un triángulo equilátero:

$A = 0,75 \cdot 4\pi + 2 \cdot 1,73 : 2 = 11,15\ \text{cm}^2$.

42. **Halla el área de estas figuras.**





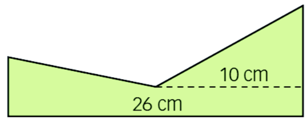


FIGURA DE LA IZQUIERDA

El área de la figura es la suma de las áreas de un triángulo y la de seis semicírculos:

$A = A_{Triángulo} + 6 \cdot A_{Semicírculos}$

Primero se calcula la altura del triángulo: $h = \sqrt{1,3^2 - 1,2^2} = 0,5\ \text{m}$.

Así, el área de la figura es: $A = A_{Triángulo} + 6 \cdot A_{Semicírculos} = \frac{2,4 \cdot 0,5}{2} + 6 \cdot \frac{\pi (0,2)^2}{2} = 0,6 + 0,377 = 0,977\ \text{m}^2$.

FIGURA CENTRAL

Con ayuda de las líneas discontinuas verticales se obtienen cuatro figuras, un rectángulo y tres triángulos.
Su área es:

$$A = A_{\text{Triángulo Izquierda}} + A_{\text{Rectángulo}} + A_{\text{Triángulo Derecha arriba}} + A_{\text{Triángulo Derecha abajo}} =$$
$$= \frac{16 \cdot 7}{2} + 21 \cdot 28 + \frac{12 \cdot 14}{2} + \frac{5 \cdot 7}{2} = 56 + 588 + 17,5 + 84 = 745,5\ \text{cm}^2$$

FIGURA DE LA DERECHA

Continuando la línea discontinua hacia la izquierda, se obtienen tres figuras, dos triángulos y un rectángulo. Su área es:

$$A = A_{\text{Triángulo Izquierda arriba}} + A_{\text{Rectángulo}} + A_{\text{Triángulo Derecha arriba}} = \frac{16 \cdot 2}{2} + 26 \cdot 2 + \frac{10 \cdot 6}{2} = 16 + 52 + 30 = 98\ \text{cm}^2$$

ACTIVIDADES FINALES

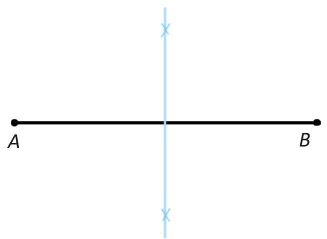
43. **Halla y dibuja estos lugares geométricos.**

a) Los puntos del plano que equidistan de los extremos *A* y *B* de un segmento de 5 cm.

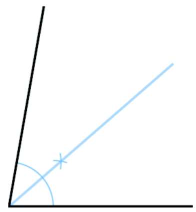
b) Los puntos del plano que equidistan de los lados de un ángulo de 80°.

c) Los puntos del plano que equidistan de dos vértices no consecutivos de un cuadrado.

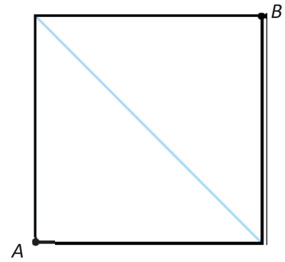
a) Mediatriz del segmento



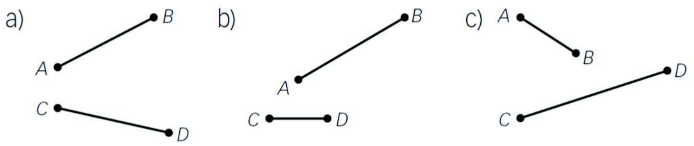
b) Bisectriz del ángulo de 80º



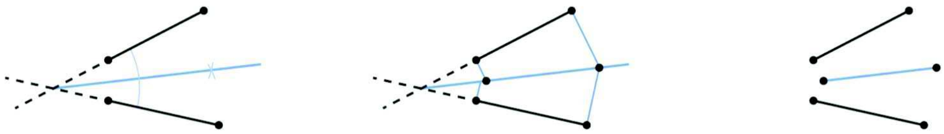
c) Diagonal que pasa por los otros dos vértices



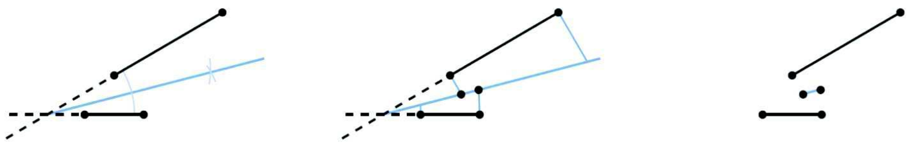
44. **Dibuja en tu cuaderno los puntos del plano que equidistan de los dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.**



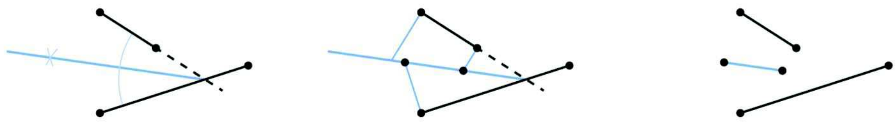
a)



b)



c)



45. **Traza el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de estos elementos geométricos.**

a) Dos rectas paralelas.

b) Los puntos de una circunferencia de radio *r*.

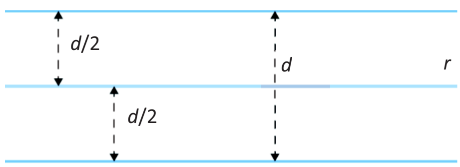
c) Dos circunferencias concéntricas.

a) Recta que equidista de las dos rectas paralelas.

Trazamos una perpendicular a las dos rectas.

Hallamos el punto medio del segmento que determinan en la perpendicular las dos rectas.

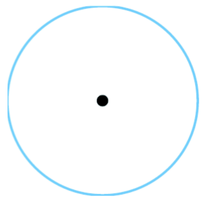
Trazamos las paralelas a las rectas que pasan por dicho punto.



b) Centro de la circunferencia

Tomamos tres puntos de la circunferencia, trazamos las mediatrices de los segmentos que determinan los puntos.

El punto de intersección de las mediatrices es el centro de la circunferencia.

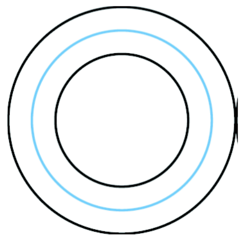


c) Circunferencia concéntrica y de radio la media aritmética de los dos radios.

Trazamos un radio de la circunferencia mayor.

Hallamos el punto medio del segmento que determinan en el radio las dos circunferencias.

Trazamos la circunferencia de mismo centro que las dos anteriores que pasa por el punto medio del segmento.



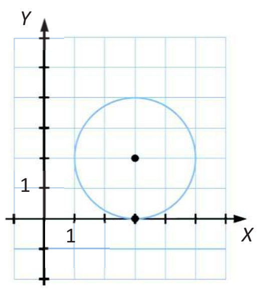
46. Haz una circunferencia con centro en el punto *P*(3, 2) de forma que:

a) El eje de abscisas sea tangente a ella en el punto (3, 0).

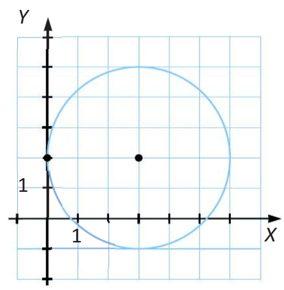
b) El eje de ordenadas sea tangente a ella en el punto (0, 2).

Tomamos de radio la distancia entre el punto *P* y el punto del eje donde debe ser tangente. Tomamos como centro el punto *P* y trazamos la circunferencia:

a)



b)

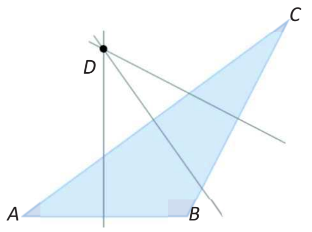


47. Dibuja un triángulo de lados *a*, *b* y *c*, y encuentra el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de sus vértices.

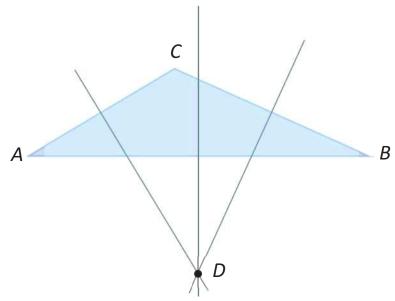
a) $a = 6, b = 8$ y $c = 12$ b) $a = 4, b = 5$ y $c = 8$

El lugar geométrico es el circuncentro.

a)

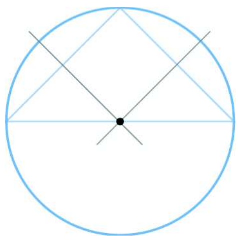


b)



48. En un triángulo rectángulo isósceles la hipotenusa mide 10 cm. Traza su circunferencia circunscrita y calcula su radio.

El centro de la circunferencia estará en la mitad de la hipotenusa, el radio es 5 cm.



49. Averigua qué polígono cumple que la suma de sus ángulos interiores es 1980°.

$S = 1\,980° = 180° \cdot (n - 2) \rightarrow n = \dfrac{1980}{180} + 2 = 11 + 2 = 13 \rightarrow$ Se trata de un polígono de 13 lados.

50. Calcula la suma de los ángulos interiores de un polígono en el que al trazar sus diagonales desde un vértice se forman los triángulos indicados.

a) 3 triángulos b) 5 triángulos c) 7 triángulos

a) $S = 180° \cdot 3 = 540°$ b) $S = 180° \cdot 5 = 900°$ c) $S = 180° \cdot 7 = 1260°$

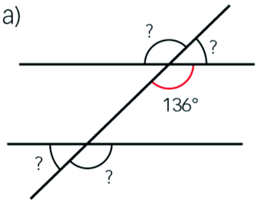
51. Si el número de diagonales, *d*, de un polígono de *n* lados viene dado por $d = \dfrac{n \cdot (n - 3)}{2}$, halla la suma de los ángulos interiores de un polígono con 9 diagonales.

$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2} = 9 \rightarrow n^2 - 3n - 18 = 0 \rightarrow \begin{cases} n = 6 \\ n = -3 \rightarrow \text{solución no válida} \end{cases}$$

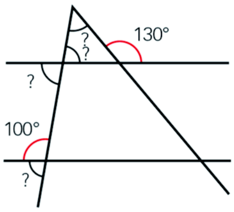
$n = 6 \rightarrow S_6 = 180° \cdot 4 = 720°$

52. **Halla los ángulos con interrogante y razona cómo lo haces.**

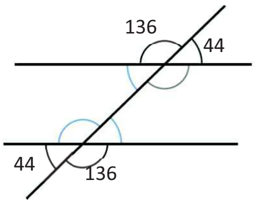
a)



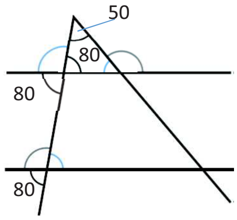
b)



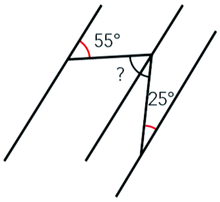
a)

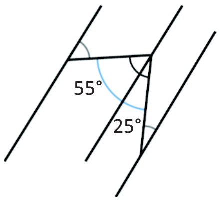


b)



53. **Calcula el valor del ángulo desconocido y explica cómo lo haces.**





El ángulo desconocido mide $55° + 25° = 80°$

54. **Determina si las siguientes medidas se corresponden con los lados de un triángulo rectángulo.**

a) 6, 8 y 10 cm
b) 5, 5 y $5\sqrt{2}$ cm
c) $\sqrt{61}$, 5 y 6 cm
d) 3, 7 y 6 cm
e) 7, 24 y 25 cm
f) 3, 3 y 5 cm

a) $\left.\begin{array}{l} a^2 = 10^2 = 100 \\ b^2 + c^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí se corresponden con las medidas de un triángulo rectángulo.

b) $\left.\begin{array}{l} a^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 50 \\ b^2 + c^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí se corresponden con las medidas de un triángulo rectángulo.

c) $\left.\begin{array}{l} a^2 = \left(\sqrt{61}\right)^2 = 61 \\ b^2 + c^2 = 5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí se corresponden con las medidas de un triángulo rectángulo.

d) $\left.\begin{array}{l} a^2 = 7^2 = 49 \\ b^2 + c^2 = 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45 \end{array}\right\} \rightarrow$ No se corresponden con las medidas de un triángulo rectángulo.

e) $\left.\begin{array}{l} a^2 = 25^2 = 625 \\ b^2 + c^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí se corresponden con las medidas de un triángulo rectángulo.

f) $\left.\begin{array}{l} a^2 = 5^2 = 25 \\ b^2 + c^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18 \end{array}\right\} \rightarrow$ No se corresponden con las medidas de un triángulo rectángulo.

55. **Copia en tu cuaderno y completa esta tabla de medidas donde *a* es la hipotenusa y *b* y *c* son los catetos de un triángulo rectángulo.**

a	*b*	*c*
5	3	4
$5\sqrt{5}$	10	**5**
$\sqrt{52}$	**4**	6
4	$2\sqrt{2}$	**2,83**
8,6	5	7
7,07	5	5

56. **El lado de un cuadrado mide 2 cm. Si se varía el tamaño, di cuánto hay que aumentar o disminuir el lado para que la nueva diagonal tenga esta relación con la original.**

a) La mitad

b) El doble

c) El triple

d) La tercera parte

La diagonal *d* de un cuadrado de lado *l* mide $d=\sqrt{l^2+l^2}=\sqrt{2l^2}=l\sqrt{2}$.

La diagonal de un cuadrado de lado 2 cm mide $2\sqrt{2}$.

Llamando D a la diagonal del cuadrado modificado y L a su lado, se tiene:

a) $D=\frac{d}{2}=\frac{l\sqrt{2}}{2}=\frac{l}{2}\sqrt{2}\rightarrow L=\frac{l}{2}$ $\longrightarrow$ Por tanto, el lado mide la mitad del original: 1 cm.

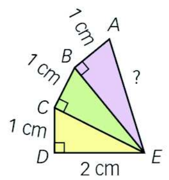
b) $D=2d=2l\sqrt{2}=\rightarrow L=2l$ $\longrightarrow$ Por tanto, el lado mide el doble del original: 4 cm.

c) $D=3d=3l\sqrt{2}=\rightarrow L=3l$ $\longrightarrow$ Por tanto, el lado mide el triple del original: 6 cm.

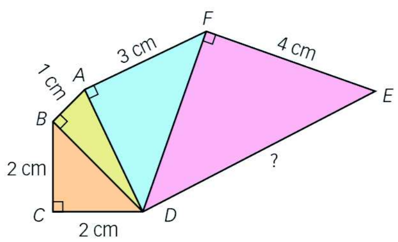
d) $D=\frac{d}{3}=\frac{l\sqrt{2}}{3}=\frac{l}{3}\sqrt{2}\rightarrow L=\frac{l}{3}$ $\longrightarrow$ Por tanto, el lado mide la tercera parte del original: $\frac{2}{3}$ cm.

57. **Halla la longitud de los segmentos indicados.**

a)



b)



a) $\overline{EC}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}\rightarrow\overline{EB}=\sqrt{1+5}=\sqrt{6}\rightarrow\overline{EA}=\sqrt{1+6}=\sqrt{7}$ cm

b) $\overline{BD}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}\rightarrow\overline{DA}=\sqrt{1+8}=3\rightarrow\overline{DF}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}\rightarrow\overline{DE}=\sqrt{18+16}=\sqrt{34}$ cm

59. **Un triángulo equilátero tiene 36 cm de perímetro. Halla su altura.**

El lado del triángulo mide 36 : 3 = 12 cm.

$12^2=6^2+h^2\rightarrow h=\sqrt{144-36}=10{,}39$ cm

60. **La altura de un triángulo equilátero mide 6,93 cm. ¿Cuánto mide el lado?**

$$l^2 = 6{,}93^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = 6{,}93^2 \rightarrow \frac{3l^2}{4} = 48{,}0249 \rightarrow l = \sqrt{\frac{48{,}0249 \cdot 4}{3}} = 8 \text{ cm}$$

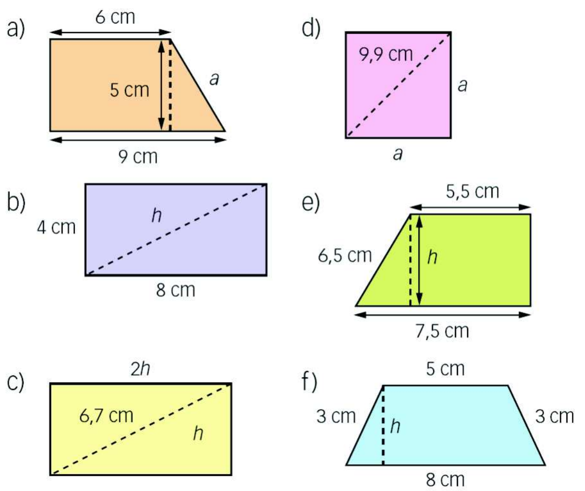
61. **Halla la altura, sobre el lado desigual, de un triángulo isósceles cuyos lados miden 7, 7 y 4 cm.**

$$7^2 = 2^2 + h^2 \rightarrow h = \sqrt{49 - 4} = 6{,}71 \text{ cm}$$

62. **El lado desigual de un triángulo isósceles mide 36 cm y la altura mide 45 cm. ¿Cuánto miden los lados iguales?**

$$l^2 = 45^2 + 18^2 \rightarrow l = \sqrt{2\,025 + 324} = 48{,}47 \text{ cm}$$

63. **Calcula la distancia que falta en cada caso.**



a) $a^2 = 5^2 + 3^2 \rightarrow a = \sqrt{25 + 9} = 5{,}83$ cm

b) $h^2 = 4^2 + 8^2 \rightarrow a = \sqrt{16 + 64} = 8{,}94$ cm

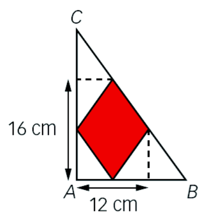
c) $6{,}7^2 = h^2 + (2h)^2 \rightarrow 44{,}89 = 5h^2 \rightarrow h = \sqrt{44{,}89 : 5} = 3$ cm

d) $9{,}9^2 = a^2 + a^2 \rightarrow 98{,}01 = 2a^2 \rightarrow a = \sqrt{98{,}01 : 2} = 7$ cm

e) $6{,}5^2 = 2^2 + h^2 \rightarrow h = \sqrt{42{,}25 - 4} = 6{,}18$ cm

f) $3^2 = 1{,}5^2 + h^2 \rightarrow h = \sqrt{9 - 2{,}25} = 2{,}6$ cm

64. **Observa la figura y calcula el lado del rombo y las longitudes del cateto *AB*, del cateto *AC* y de la hipotenusa *BC*.**



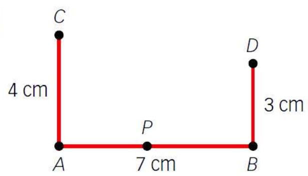
$$l = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

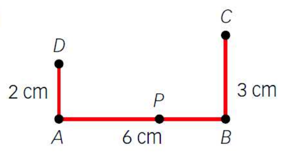
$$AC = \frac{D}{2} + D = \frac{16}{2} + 16 = 24 \text{ cm}$$

$$AB = \frac{d}{2} + d = \frac{12}{2} + 12 = 18 \text{ cm}$$

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} \rightarrow AC = \sqrt{24^2 + 18^2} = 30 \text{ cm}$$

65. Fíjate en los dibujos y halla la distancia del punto *P* al punto *A*, para que se verifique que la longitud del segmento *CP* sea igual que la del segmento *DP*.

a) 

b) 

a) Si $\overline{CP} = \overline{PD} = d$

$$\left.\begin{array}{l} d^2 = 4^2 + x^2 \\ d^2 = 3^2 + (7 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow 4^2 + x^2 = 3^2 + (7 - x)^2$$

$16 + x^2 = 9 + 49 - 14x + x^2$

$14x = 42 \rightarrow x = 3$ cm

$d^2 = 4^2 + x^2 \rightarrow d = \sqrt{16 + 9} = 5$ cm

b) Si $\overline{CP} = \overline{PD} = d$

$$\left.\begin{array}{l} d^2 = 2^2 + x^2 \\ d^2 = 3^2 + (6 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow 2^2 + x^2 = 3^2 + (6 - x)^2$$

$4 + x^2 = 9 + 36 - 12x + x^2$

$12x = 41 \rightarrow x = 3{,}42$ cm

$d^2 = 2^2 + x^2 \rightarrow d = \sqrt{4 + 11{,}69} = 3{,}96$ cm

66. Uno de los lados de un triángulo mide 4,6 cm y la altura sobre él mide 3,8 cm.

a) Halla el área del triángulo.

b) Si otro lado del triángulo mide 3,8 cm, ¿cuánto mide la altura sobre ese lado?

a) $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4{,}6 \cdot 3{,}8}{2} = 8{,}74 \text{ cm}^2$

b) $4{,}6^2 = 1{,}9^2 + h^2 \rightarrow h = \sqrt{21{,}16 - 3{,}61} = 4{,}19$ cm

67. La altura de un triángulo mide dos terceras partes de su base *b* = 9 cm. Calcula su área.

$$h = \frac{2}{3}b = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6 \text{ cm}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{9 \cdot 6}{2} = 27 \text{ cm}^2$$

68. **Determina el perímetro y el área de un cuadrado cuya diagonal mide:**

a) $4\sqrt{2}$ cm b) $6\sqrt{2}$ cm

El perímetro de un cuadrado de lado l es $4l$ y el área es l^2. Se calcula el lado en función de la diagonal:

$$d=\sqrt{l^2+l^2}=\sqrt{2l^2}=l\sqrt{2}\rightarrow l=\frac{d}{\sqrt{2}}$$

a) $d=4\sqrt{2}=l\sqrt{2}\rightarrow l=4$ cm $\quad P=4l=4\cdot 4=16$ cm $\quad A=l^2=4^2=16$ cm^2

b) $d=6\sqrt{2}=l\sqrt{2}\rightarrow l=6$ cm $\quad P=4l=4\cdot 6=24$ cm $\quad A=l^2=6^2=36$ cm^2

69. **Calcula el área de un cuadrado cuyo perímetro mide igual que el de un triángulo equilátero de lado 6 cm.**

$$\left.\begin{array}{l}P_T=3l_T=3\cdot 6=18\\ P_C=4l_C\end{array}\right\}\rightarrow l_C=\frac{18}{4}=4{,}5 \text{ cm}$$

$$A_C={l_C}^2=4{,}5^2=20{,}25 \text{ cm}^2$$

70. **Halla el área de un cuadrado cuyo perímetro mide lo mismo que el de un triángulo equilátero de altura 8 cm.**

Se calcula primero el lado del triángulo equilátero:

$$l^2=8^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\rightarrow l^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2=64\rightarrow\frac{3l^2}{4}=64\rightarrow l=\sqrt{\frac{64\cdot 4}{3}}=9{,}24 \text{ cm}$$

$$\left.\begin{array}{l}P_T=3l_T=3\cdot 9{,}24=27{,}72\\ P_C=4l_C\end{array}\right\}\rightarrow l_C=\frac{27{,}72}{4}=6{,}93 \text{ cm}$$

$$A_C={l_C}^2=6{,}93^2=48{,}02 \text{ cm}^2$$

71. **Señala cuál es el lado y el perímetro de un cuadrado de 210,25 cm² de área.**

$$A=210{,}25 \text{ cm}^2=l^2\rightarrow l=\sqrt{210{,}25}=14{,}5 \text{ cm}$$

$$P=4\cdot 14{,}5=58 \text{ cm}$$

72. **Calcula el perímetro y el área de un rectángulo cuya diagonal mide 34 cm, y la base, 30 cm.**

Llamando h a la altura del rectángulo, se tiene:

$$34^2=30^2+h^2\rightarrow h=\sqrt{1156-900}=16 \text{ cm}$$

$$P=(30+16)\cdot 2=92 \text{ cm}$$

$$A=30\cdot 16=480 \text{ cm}^2$$

73. **Dado un rectángulo cuyos lados miden 4 cm y 9 cm, contesta verdadero o falso.**

a) El área de un cuadrado con el mismo perímetro es 169 cm².

b) El perímetro de un cuadrado con igual área es 24 cm.

c) El área de un rectángulo cuyas dimensiones son el doble es $2\cdot 36=72$ cm².

Se calcula el perímetro y el área del rectángulo: $P_R = (9+4)\cdot 2 = 26$ cm $\qquad A_R = 9\cdot 4 = 36$ cm^2

a)
$$\left.\begin{array}{l} P_C = P_R = 26 \text{ cm} \\ P_C = 4l \end{array}\right\} \to l = \frac{26}{4} = 6{,}5 \text{ cm} \to A_C = l^2 = 6{,}5^2 = 42{,}25 \text{ cm}^2 \neq 169 \text{ cm}^2 \to \text{Falso}$$

b)
$$\left.\begin{array}{l} A_C = A_R = 36 \text{ cm}^2 \\ A_C = l^2 \end{array}\right\} \to l = \sqrt{36} = 6 \text{ cm} (l = -6 \text{ cm no es válida}) \to$$
$$\to P_C = 4l = 4\cdot 6 = 24 \text{ cm} \to \text{Verdadero}$$

c) El área de un rectángulo cuyas dimensiones son el doble, esto es, 8 cm y 18 cm, es 18 · 8 = 144 cm^2, por tanto, el enunciado es falso.

74. Calcula el perímetro, la altura y el área de un triángulo equilátero de lado 14 cm.

Al tratarse de un triángulo equilátero, el perímetro es $3l = 3 \cdot 14 = 42$ cm.

Se calcula la altura con ayuda del teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{14^2 - 7^2} = \sqrt{196 - 49} = \sqrt{147} = 12{,}12 \text{ cm}$$

Conocida la altura, se calcula el área:

$$A = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{14\cdot 12{,}12}{2} = 84{,}84 \text{ cm}^2$$

75. La diagonal de un cuadrado mide 128 mm. ¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?

El perímetro de un cuadrado es $4l$ y es área es l^2, por tanto se necesita la medida del lado. Calculamos el lado aplicando el teorema de Pitágoras:

$$128^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \to 16\,384 = 2l^2 \to l = \sqrt{\frac{16\,384}{2}} = 90{,}5 \text{ mm}$$

El perímetro es $P = 4\cdot 90{,}5 = 362$ mm.

El área es $A = l^2 = 90{,}5^2 = 8192$ mm^2.

76. El área de un rombo es 150 dm² y una de sus diagonales mide 20 dm. Calcula la otra diagonal y el perímetro del rombo.

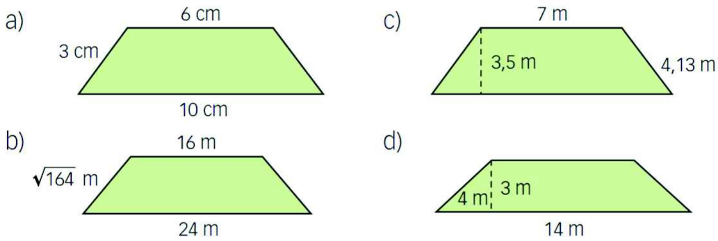
$$\left.\begin{array}{l} A = \dfrac{D\cdot d}{2} = 150 \text{ dm}^2 \\ D = 20 \text{ dm} \end{array}\right\} \to \frac{20\cdot d}{2} = 150 \to d = \frac{150\cdot 2}{20} = 15 \text{ dm}$$

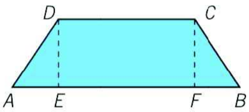
Se calcula el lado del rombo con ayuda del teorema de Pitágoras:

$$l^2 = 10^2 + 7{,}5^2 \to l = \sqrt{100 + 56{,}25} = 12{,}5 \text{ cm}$$

El perímetro es $4l = 4 \cdot 12{,}5 = 50$ dm

78. **Halla el área de estos trapecios isósceles.**





a) $h = \overline{DE} = \sqrt{3^2 - \left(\dfrac{10-6}{2}\right)^2} = \sqrt{5} = 2{,}24$ cm

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(10+6)\cdot 2{,}24}{2} = 17{,}92 \text{ cm}^2$$

b) $h = \overline{DE} = \sqrt{(\sqrt{164})^2 - \left(\dfrac{24-16}{2}\right)^2} = \sqrt{148} = 12{,}17$ m

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(24+16)\cdot 12{,}17}{2} = 243{,}4 \text{ m}^2$$

c) $\overline{AE} = \sqrt{4{,}13^2 - 3{,}5^2} = \sqrt{4{,}81} = 2{,}19$ m

$\overline{FB} = \overline{AB} = 7 + 2\cdot 2{,}19 = 11{,}38$ m

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(11{,}38+7)\cdot 3{,}5}{2} = 32{,}16 \text{ m}^2$$

d) $b = 14 - 2\cdot 4 = 6$ m

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(14+6)\cdot 3}{2} = 30 \text{ m}^2$$

79. **Las diagonales de un trapecio rectángulo miden 10 cm y 17 cm, y su altura, 8 cm. Calcula su perímetro y su área.**

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$b = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ cm $\qquad B = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15$ cm

En el triángulo rectángulo de catetos 8 cm y 15 – 6 = 9 cm, aplicando el teorema de Pitágoras, se calcula el lado oblicuo del trapecio.

$\text{Lado oblicuo} = \sqrt{8^2 + 9^2} = \sqrt{145} = 12{,}04$ cm

Ya se tienen todos los lados del trapecio y se calculan el perímetro y el área:

$P = 8 + 6 + 12{,}04 + 15 = 41{,}04$ cm $\qquad A = \dfrac{(B+b)\cdot h}{2} = \dfrac{(15+6)\cdot 8}{2} = 84 \text{ cm}^2$

80. **Calcula el área de un trapecio rectángulo sabiendo que la base menor mide 12 cm; la diagonal menor, 15 cm, y el lado oblicuo, 13 cm.**

En el triángulo rectángulo de cateto 12 cm e hipotenusa 15 cm, aplicando el teorema de Pitágoras, se calcula la altura del trapecio.

$h = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9$ cm

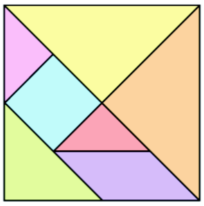
En el triángulo rectángulo de cateto 9 cm e hipotenusa 13 cm, aplicando el teorema de Pitágoras, se calcula la diferencia, *d,* entre las bases del trapecio.

$$d = \sqrt{13^2 - 9^2} = \sqrt{169 - 81} = \sqrt{88} = 9{,}38 \text{ cm}$$

Con lo que la base mayor del trapecio mide 12 + 9,38 = 21,38 cm y se calcula el área:

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(21{,}38+12)\cdot 9}{2} = 150{,}21 \text{ cm}^2$$

81. Considera las siete piezas del *tangram* chino y halla el área de cada una de ellas.



Hallamos primero la diagonal del cuadrado:

$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = l\sqrt{2} \rightarrow d = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$A_{\text{Triángulo mayor}} = \frac{5\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}}{8} = \frac{25\cdot 2}{8} = 6{,}25 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Triángulo mediano}} = \frac{2{,}5\cdot 2{,}5}{2} = 3{,}125 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Triángulo menor}} = \frac{\frac{d}{4}\cdot\frac{d}{4}}{2} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{25}{16} = 1{,}5625 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Cuadrado}} = \left(\frac{d}{4}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{50}{16} = 3{,}125 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Romboide}} = b\cdot h = \frac{l}{2}\cdot\frac{l}{4} \rightarrow A_{\text{Romboide}} = 2{,}5\cdot 1{,}25 = 3{,}125 \text{ cm}^2$$

Comprobamos que la suma de las áreas de todas las piezas es igual al área total del cuadrado, $5^2 = 25 \text{ cm}^2$:

$$2\cdot 6{,}25 + 3{,}125 + 2\cdot 1{,}5625 + 3{,}125 + 3{,}125 = 25$$

82. Determina el perímetro y la diagonal de un cuadrado cuya área es 67,24 cm².

$$A = 67{,}24 \text{ cm}^2 = l^2 \rightarrow l = \sqrt{67{,}24} = 8{,}2 \text{ cm}$$

$$P = 4l = 4\cdot 8{,}2 = 32{,}8 \text{ cm}$$

$$\text{Diagonal} = d = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2} = 8{,}2\cdot\sqrt{2} = 11{,}596 \text{ cm}$$

83. Calcula la medida de las diagonales de un rectángulo cuya área es 28,8 cm² sabiendo que la altura mide 4 cm.

$$A = 28{,}8 \text{ cm}^2 = 4\cdot base \rightarrow base = \frac{28{,}8}{4} = 7{,}2 \text{ cm}$$

$$\text{Diagonal} = d = \sqrt{4^2 + 7{,}2^2} = \sqrt{67{,}84} = 8{,}236 \text{ cm}$$

84. **La relación entre las diagonales de un rombo, *d* y *D*, viene dada por la expresión $d = \frac{3D}{5}$. Calcula el perímetro y el área del rombo sabiendo que *D* = 15 cm.**

$$d = \frac{3D}{5} = \frac{3 \cdot 15}{5} = 9 \text{ cm}$$
$$l = \sqrt{7{,}5^2 + 4{,}5^2} = \sqrt{76{,}5} = 8{,}75 \text{ cm}$$
$$P = 4l = 4 \cdot 8{,}75 = 35 \text{ cm}$$
$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{9 \cdot 15}{2} = 67{,}5 \text{ cm}^2$$

85. **Halla la apotema y el área de un hexágono regular de 14 cm de lado.**

En el hexágono regular el lado es igual al radio, por tanto la apotema es:

$$a = \sqrt{14^2 - 7^2} = \sqrt{147} = 12{,}12 \text{ cm}$$

Y el área es: $A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 14 \cdot 12{,}12}{2} = 509{,}04 \text{ cm}^2$.

86. **Determina la apotema y el área de un hexágono regular de 72 cm de perímetro.**

Si el perímetro del hexágono regular es 72 cm, el lado es 72 : 6 = 12 cm.

Se calcula la apotema y con ella el área:

$$a = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 10{,}39 \text{ cm}$$

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 12 \cdot 10{,}39}{2} = 374{,}04 \text{ cm}^2$$

87. **Averigua el lado y el área de un hexágono regular sabiendo que su apotema mide 8,09 cm.**

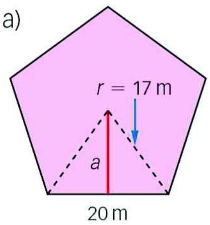
La apotema es el cateto del triángulo rectángulo que tiene por hipotenusa el lado del hexágono y por el otro cateto la mitad del lado. Se calcula el lado:

$$l^2 = 8{,}09^2 + \frac{l^2}{4} \rightarrow \frac{3l^2}{4} = 65{,}4481 \rightarrow l = \sqrt{\frac{65{,}4481 \cdot 4}{3}} = \sqrt{87{,}264} = 9{,}34 \text{ cm}$$

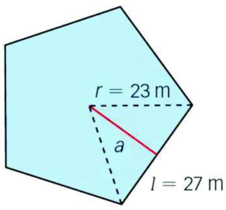
El área es $A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 9{,}34 \cdot 8{,}09}{2} = 226{,}68 \text{ cm}^2$.

88. **Halla la apotema y el área de cada uno de estos pentágonos regulares.**

a)



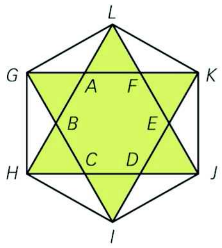
b)



a) $a = \sqrt{17^2 - 10^2} = \sqrt{289 - 100} = 13{,}75 \text{ m}$ $\qquad A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{5 \cdot 20 \cdot 13{,}75}{2} = 687{,}5 \text{ m}^2$

b) $a = \sqrt{23^2 - 13{,}5^2} = 18{,}62 \text{ m}$ $\qquad A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{5 \cdot 27 \cdot 18{,}62}{2} = 1\,256{,}85 \text{ m}^2$

89. **El lado del hexágono regular *ABCDEF* mide 8 cm, y su apotema, 6,9 cm.**



a) ¿Cuál es el área del hexágono *ABCDEF*?

b) ¿Y el de la parte coloreada?

c) ¿Cuál es el área del hexágono *GHIJKL*?

d) ¿Qué fracción del hexágono *GHIJKL* representa el área de la figura coloreada?

a) $A = \dfrac{6 \cdot 8 \cdot 6{,}9}{2} = 165{,}6 \text{ cm}^2$

b) El área de la figura coloreada es el doble del área del hexágono *ABCDEF*, es decir, $2 \cdot 165{,}6 = 331{,}2 \text{ cm}^2$.

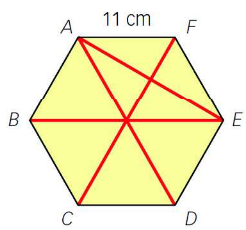
c) El área del hexágono *GHIJKL* es el triple del área del hexágono *ABCDEF*, es decir, $3 \cdot 165{,}6 = 496{,}8 \text{ cm}^2$.

d) $\dfrac{331{,}2}{496{,}8} = \dfrac{2}{3}$

90. **Halla el área de un hexágono regular de 90 cm de perímetro.**

$P = 90 \text{ cm} \rightarrow l = \dfrac{90}{6} = 15 \text{ cm}$ $\quad a = \sqrt{15^2 - 7{,}5^2} = 13 \text{ cm}$ $\quad A = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{90 \cdot 13}{2} = 585 \text{ cm}^2$

91. **Sean *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F* los vértices de un hexágono regular de 11 cm de lado. Halla la longitud de los siguientes segmentos.**



a) $\overline{AE}$ b) $\overline{AD}$ c) $\overline{BE}$ d) $\overline{FC}$

a) $\left(\dfrac{\overline{AE}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{11}{2}\right)^2 = 11^2 \rightarrow \left(\dfrac{\overline{AE}}{2}\right)^2 = 121 - 30{,}25 = 90{,}75 \rightarrow \overline{AE} = 2 \cdot \sqrt{90{,}75} = 19{,}05 \text{ cm}$

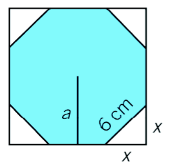
b) El lado del hexágono mide lo mismo que el radio, luego $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{FC} = 11 \cdot 2 = 22 \text{ cm}$.

c) (Ver apartado b) d) (Ver apartado b)

92. **Determina el perímetro de un heptágono regular de área 215,75 cm² y apotema 8 cm.**

$A = \dfrac{P \cdot a}{2} \rightarrow \dfrac{P \cdot 8}{2} = 215{,}75 \text{ cm}^2 \rightarrow P = 53{,}94 \text{ cm}$

93. **Calcula el área de un octógono regular de perímetro 48 cm.**



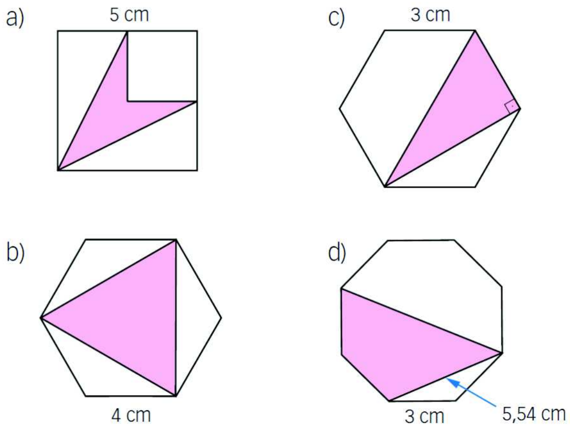
El lado mide 6 cm.

$6^2 = x^2 + x^2 \rightarrow x = \sqrt{18} = 4,24$ cm

$a = 4,24 + \dfrac{6}{2} = 7,24$ cm

$A = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{48 \cdot 7,24}{2} = 173,76$ cm^2

94. **Determina el área de las superficies coloreadas.**



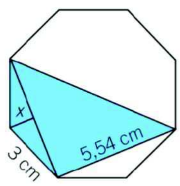
a) Cuadrado mayor – Cuadrado menor – 2 · Triángulos

$A = 5^2 - 2,5^2 - 2 \cdot \left(\dfrac{5 \cdot 2,5}{2}\right) = 6,25$ cm^2

b) Si trazamos los triángulos equiláteros que forman el hexágono, la zona coloreada es la mitad de cada triángulo, por lo que será la mitad del área del hexágono. La apotema del hexágono mide 3,46 cm, su área es de 41,57 cm^2 y el área coloreada mide 20,78 cm^2.

c) Si trazamos los triángulos equiláteros que forman el hexágono, la zona coloreada es un triángulo entero y la mitad de otros dos, luego equivale a dos triángulos, es decir, la tercera parte del hexágono. Como el hexágono tiene una apotema de 2,6 cm, su área es de 23,4 cm^2 y el área coloreada mide 7,8 cm^2.

d)



El área total es el área de los triángulos:

$x = \sqrt{9 - 7,67} = \sqrt{1,33} = 1,15$ cm

$A =$ Triángulo mayor + Triángulo menor $=$

$= 5,54 \cdot 5,54 : 2 + 5,54 \cdot 1,15 : 2 = 18,53$ cm^2

95. **Halla el área de un círculo sabiendo que la longitud de la circunferencia que lo delimita es 13π cm.**

$L = 2\pi r = 13\pi \rightarrow r = \dfrac{13\pi}{2\pi} = 6,5$ cm $\qquad A = \pi r^2 = \pi \cdot 6,5^2 = 132,73$ cm^2

96. **Señala el área de un círculo cuyo diámetro es igual al perímetro de un rombo de diagonales 1 cm y 2 cm.**

Diámetro = Perímetro de un rombo con $d = 1$ cm y $D = 2$ cm $= 4l$. Entonces:

$l^2 = 1^2 + 0,5^2 \rightarrow l = \sqrt{1,25} = 1,12$ cm $\qquad P = 4l = 4 \cdot 1,12 = 4,48$ cm

Diámetro $= 4,48$ cm $= 2r \rightarrow r = 2,24$ cm $\qquad A = \pi r^2 = \pi \cdot 2,24^2 = 15,76$ cm^2

97. **Calcula el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de longitud 33,93 cm.**

$$L=2\pi r=33{,}93\text{ cm}\rightarrow 2r=\frac{33{,}93}{\pi}=10{,}8\text{ cm}=\text{diámetro de la circunferencia}=\text{diagonal del cuadrado}$$

$$10{,}8^2=2l^2\rightarrow l^2=A=\frac{10{,}8^2}{2}=58{,}32\text{ cm}^2$$

98. **Un triángulo rectángulo e isósceles inscrito en una circunferencia tiene un cateto que mide 23 cm. Calcula el área del círculo.**

La hipotenusa del triángulo rectángulo e isósceles es el diámetro de la circunferencia en el que está inscrito. Se calcula con esto el radio y con él, el área del círculo:

$$d^2=23^2+23^2\rightarrow d=\sqrt{1058}=32{,}52\text{ cm}\rightarrow r=\frac{d}{2}=16{,}26\text{ cm}$$

$$A=\pi r^2=\pi\cdot 16{,}26^2=830{,}6\text{ cm}^2$$

99. **Determina el área de un círculo circunscrito a un triángulo rectángulo de catetos 4 cm y 6 cm.**

$$d^2=4^2+6^2\rightarrow d=\sqrt{52}=7{,}2\text{ cm}\rightarrow r=\frac{d}{2}=3{,}6\text{ cm}$$

$$A=\pi r^2=\pi\cdot 3{,}6^2=40{,}72\text{ cm}^2$$

100. **Halla el área de la corona circular limitada por las circunferencias circunscrita e inscrita de un hexágono regular de lado 5 cm.**

El radio mayor de la corona es el lado del hexágono, esto es, R = lado del hexágono = 5 cm; el radio menor de la corona es la apotema del hexágono: $a=\sqrt{5^2-2{,}5^2}=\sqrt{18{,}75}=4{,}33\text{ cm}$.

El área de la corona es: $A=\pi\left(R^2-r^2\right)=\pi\cdot\left(5^2-4{,}33^2\right)=19{,}63\text{ cm}^2$.

101. **Un rectángulo de 20 cm de base y 15 cm de altura está inscrito en una circunferencia. ¿Cuál es la diferencia entre la longitud de la circunferencia y el perímetro del rectángulo?**

La medida de la diagonal del rectángulo es la medida del diámetro de la circunferencia. Se calcula el radio:

$$d^2=15^2+20^2\rightarrow d=\sqrt{225+400}=25\text{ cm}\rightarrow r=\frac{d}{2}=12{,}5\text{ cm}$$

$$\left.\begin{array}{l}L_C=2\pi r=2\pi\cdot 12{,}5=78{,}54\text{ cm}\\ P_R=(20+15)\cdot 2=70\text{ cm}\end{array}\right\}\rightarrow L_C-P_R=8{,}54\text{ cm}$$

102. **Calcula la apotema de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de 14 cm de diámetro.**

El radio de la circunferencia es 7 cm. Se calcula la apotema con ayuda del teorema de Pitágoras:

$$a=\sqrt{7^2-3{,}5^2}=\sqrt{36{,}75}=6{,}06\text{ cm}$$

103. **Determina el radio de la circunferencia que circunscribe a un hexágono regular de 9 cm de apotema.**

El radio de la circunferencia que circunscribe al hexágono es el lado del hexágono:

$$l^2 = 9^2 + \frac{l^2}{4} \to \frac{3l^2}{4} = 81 \to l = r = \sqrt{\frac{81 \cdot 4}{3}} = 10{,}39 \text{ cm}$$

104. **Calcula el radio de la circunferencia inscrita en un hexágono regular de 5 cm de lado.**

El radio de la circunferencia inscrita es la apotema del hexágono: $a = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = \sqrt{18{,}75} = 4{,}33$ cm

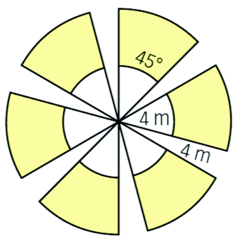
105. **Halla el área de un trapecio circular de radios 12 cm y 6 cm y de amplitud 270°.**

$$A_{\text{Sector mayor}} = \frac{\pi \cdot 12^2 \cdot 270}{360} = 339{,}12 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Sector menor}} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 270}{360} = 84{,}78 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Trapecio}} = 339{,}12 - 84{,}78 = 254{,}34 \text{ cm}^2$$

106. **Observa el molino y calcula el área de cada parte amarilla, de cada parte blanca y su área total.**

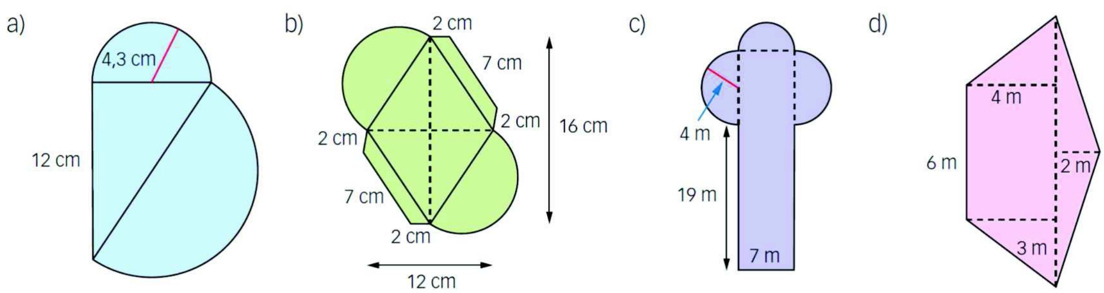


El área de cada parte blanca es: $A_{blanca} = \dfrac{\pi \cdot 4^2 \cdot 45}{360} = 6{,}28 \text{ m}^2$.

El área de cada parte amarilla es: $A_{amarilla} = \dfrac{\pi \cdot (8^2 - 4^2) \cdot 45}{360} = 18{,}84 \text{ m}^2$.

El área total es: $A_{total} = 6 \cdot (A_{blanca} + A_{amarilla}) = 6 \cdot (6{,}28 + 18{,}84) = 150{,}72 \text{ m}^2$.

107. **Calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras.**



a) El área total de la figura se calcula sumando las áreas de tres figuras: un triángulo rectángulo de catetos 12 cm y 8,6 cm, un semicírculo de radio 4,3 m y otro semicírculo de radio la mitad de la diagonal del triángulo ya citado.

Primero se calcula *h,* la hipotenusa del triángulo rectángulo y con ella el radio del semicírculo mayor, *R:*

$$h^2 = 12^2 + 8{,}6^2 \to h = \sqrt{12^2 + 8{,}6^2} = \sqrt{217{,}96} = 14{,}76 \text{ cm} \to R = \frac{14{,}76}{2} = 7{,}38 \text{ cm}$$

$$A_{total} = \frac{12 \cdot 8{,}6}{2} + \frac{\pi \cdot 4{,}3^2}{2} + \frac{\pi \cdot 7{,}38^2}{2} = 166{,}19 \text{ cm}^2 \qquad P = \pi \cdot 4{,}3 + \pi \cdot 7{,}38 + 12 = 48{,}69 \text{ cm}$$

b) La figura se compone de un rombo de diagonales 16 y 12 cm, un círculo de radio la mitad del lado del rombo y dos trapecios.

Se calcula primero el lado del rombo *B,* que además es la base mayor de los trapecios; con él se calcula el radio de los dos semicírculos, *r.*

$$B^2 = 8^2 + 6^2 \to B = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm} \to r = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

Se calcula la altura de los trapecios, *h:* $2^2 = 1{,}5^2 + h^2 \to h = \sqrt{2^2 - 1{,}5^2} = 1{,}32 \text{ cm}$.

$$A_{total} = \frac{16 \cdot 12}{2} + \pi \cdot 5^2 + 2 \cdot \frac{(10+7) \cdot 1{,}32}{2} = 196{,}98 \text{ cm}^2$$

El perímetro es: $P = 2\pi \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 7 = 53{,}42 \text{ cm}$.

c) La figura se compone de un rectángulo de dimensiones 27 m y 7 m, un círculo de radio 4 m y un semicírculo de radio 3,5 m.

$$A_{total} = 27 \cdot 7 + \pi \cdot 4^2 + \frac{\pi \cdot 3{,}5^2}{2} = 258{,}51 \text{ m}^2$$

El perímetro es: $P = 2\pi \cdot 4 + 19 \cdot 2 + 7 + \pi \cdot 3{,}5 = 81{,}13 \text{ m}$.

d) La figura se compone de un triángulo y un trapecio. La base mayor del trapecio, $B = 6 + 2 \cdot 3 = 12$, coincide con uno de los lados del triángulo. Se calcula la medida de los lados oblicuos del trapecio, *l:*

$$l^2 = 3^2 + 4^2 \to h = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m}$$

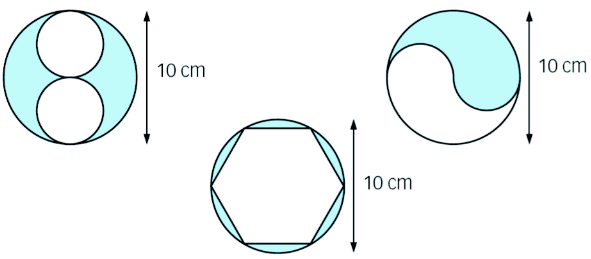
Con la mitad de la base mayor y la altura del triángulo, se calcula la medida de los dos lados iguales del triángulo*:*

$$L^2 = 6^2 + 2^2 \to L = \sqrt{6^2 + 2^2} = 6{,}32 \text{ m}$$

$$A_{total} = \frac{(12+6) \cdot 4}{2} + \frac{12 \cdot 2}{2} = 48 \text{ m}^2$$

El perímetro es: $P = 6 + 5 \cdot 2 + 7 + 2 \cdot 6{,}32 = 28{,}64 \text{ m}$.

108. **Halla el área de cada zona coloreada, sabiendo que el diámetro de la circunferencia mide 10 cm.**



a) $A = 25\pi - 2 \cdot 6{,}25\pi = 39{,}25$ cm^2

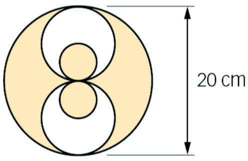
b) El área del hexágono de lado 5 cm es: $\dfrac{30 \cdot 4{,}33}{2} = 64{,}95$ cm^2

y el área comprendida mide: $25\pi - 64{,}95 = 13{,}55$ cm^2

c) Es la mitad del círculo: $25\pi/2 = 39{,}25$ cm^2

109. **Calcula el área de la zona coloreada.**

a)



b)

a) $A = \pi \cdot 10^2 - 2 \cdot \pi \cdot 5^2 + 2 \cdot \pi \cdot 2{,}5^2 = 100\pi - 50\pi + 12{,}5\pi = 62{,}5\pi = 196{,}35$ cm^2

b) El radio mayor, *R,* es el radio de la circunferencia circunscrita, $R = 6$ cm.

El radio menor, *r,* es el radio de la circunferencia inscrita y es $R : 2 = 3$ cm ya que la altura del triángulo equilátero es $R + r$ y se cumple que $R = 2r$.

$$A = \frac{\pi\left(R^2 - r^2\right) \cdot 120^o}{360^o} = \frac{\pi\left(6^2 - 3^2\right)}{3} = 9\pi = 28{,}27 \text{ cm}^2$$

110. **Halla la amplitud de un sector de área π cm² y radio 1,5 cm.**

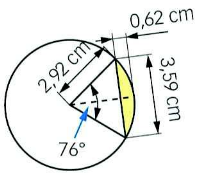
$$\pi = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360^o} \rightarrow \pi = \frac{\pi \cdot 1{,}5^2 \cdot \alpha}{360^o} \rightarrow \alpha = 160^o$$

111. **Un sector circular de ángulo central 40° tiene un área de 8 cm². Halla la superficie del círculo correspondiente.**

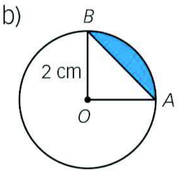
$$8 = \frac{\pi r^2 \cdot 40^o}{360^o} \rightarrow \pi r^2 = \frac{8 \cdot 360^o}{40^o} = 72 \text{ cm}^2$$

113. **Calcula el área de estos segmentos circulares.**

a)



b)



a) La altura del triángulo es el radio de la circunferencia menos la altura de la parte amarilla: 2,92 – 0,62 = 2,3 cm

$$A = A_{sector} - A_{triángulo} = \frac{\pi \cdot 2{,}92^2 \cdot 76}{360} - \frac{3{,}59 \cdot 2{,}3}{2} = 5{,}65 \text{ cm}^2 - 4{,}13 \text{ cm}^2 = 1{,}52 \text{ cm}^2$$

b) $A = A_{sector} - A_{triángulo} = \dfrac{\pi \cdot 2^2 \cdot 90}{360} - \dfrac{2 \cdot 2}{2} = \pi - 2 = 1{,}4$ cm^2

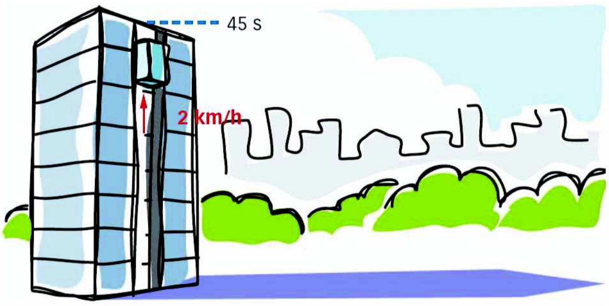
114. **Determina el área de cada segmento circular que se forma al trazar la circunferencia circunscrita a un hexágono regular de lado 7 cm.**

Se calcula la apotema del hexágono: $a^2 + 3{,}5^2 = 7^2 \rightarrow a = \sqrt{49 - 12{,}25} = 6{,}06$ cm .

El área pedida es la sexta parte de la diferencia entre el área del círculo y el área del hexágono:

$$A_{segmento} = \frac{1}{6}\left(A_{círculo} - A_{hexágono}\right) = \frac{1}{6}\left(\pi \cdot 7^2 - \frac{7 \cdot 6 \cdot 6{,}06}{2}\right) = 4{,}45 \text{ cm}^2$$

115. **La sombra de un edificio mide 30 m. El ascensor, a 2 km/h, tarda 45 segundos en llegar desde la planta baja hasta la azotea. Calcula la distancia desde la azotea hasta el extremo de la sombra.**



El ascensor a 2 km/h recorre 25 m en 45 segundos, por tanto, para calcular la distancia pedida basta con aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo de catetos 25 m y 30 m.

$h^2 = 25^2 + 30^2 \rightarrow h = \sqrt{625 + 900} = 39{,}05$ m

116. **Un jardín de forma rectangular que está cercado por una valla de 64 m tiene en sus lados más cortos plantados 8 árboles que dejan una distancia entre ellos de 4 m. ¿Cuál es el área que ocupa el jardín?**

Los lados más cortos miden 12 m, ya que hay 4 árboles en cada uno de los dos lados con una separación de 4 m entre ellos.

Los lados más largos miden $\frac{64 - 12 \cdot 2}{2} = 20$ m , con lo que el área es 20 · 12 = 240 m^2.

117. **Las dimensiones de las hojas de tu libro de matemáticas son 22 cm de ancho por 28,7 cm de alto. Su número de páginas es 296, es decir, 148 hojas.**

a) Si las pusiéramos una al lado de otra, di qué área ocuparían.

b) Si un aula mide 6 m de ancho por 8 m de largo, ¿con cuántos libros se podría tapar el suelo?

a) 296 páginas son 148 hojas: $148 \cdot (22 \cdot 28{,}7) = 93\,447{,}2 \text{ cm}^2$

b) $6 \cdot 8 = 48 \text{ m}^2 = 480\,000 \text{ cm}^2 \rightarrow \frac{480\,000 \text{ cm}^2}{93\,447{,}2 \text{ cm}^2} = 5{,}14$, esto es, se podría tapar el suelo con 5 libros y 21 hojas, ya que cada hoja cubre un área de 631,4 cm^2:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ libro} \rightarrow 93\,447{,}2 \text{ cm}^2 \\ 0{,}14 \text{ libro} \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow x = 13\,082{,}608 \text{ cm}^2 \qquad \left.\begin{array}{l} 1 \text{ hoja} \rightarrow 631{,}4 \text{ cm}^2 \\ y \rightarrow 13\,082{,}608 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow y = 20{,}72 \text{ hojas}$$

118. **Si atas una cuerda a tu lápiz de forma que entre el nudo y el extremo de la cuerda haya 13 cm, ¿cuál es el área de la figura que puedes dibujar con la punta del lápiz fijando el extremo de la cuerda en un punto?**

La figura que se dibuja es un círculo de radio 13 cm y su área es $A = \pi \cdot 13^2 = 530{,}93\ \text{cm}^2$.

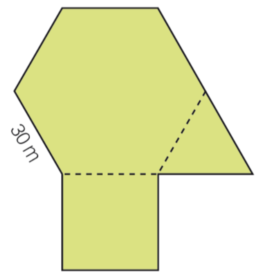
119. **Héctor ha comprado un bajoplato de 17 cm de radio. Si el área de sus platos es 615,75 cm², ¿cuál es el área del bajoplato no cubierta por el plato?**

Se calcula el radio de los platos: $A_{Plato} = 615{,}75 = \pi \cdot r^2 \rightarrow r = \sqrt{\dfrac{615{,}75}{\pi}} = 14\ \text{cm}$.

El área pedida es el área de una corona circular de radio mayor 17 cm y radio menor 14 cm:

$A = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot (17^2 - 14^2) = \pi \cdot 93 = 292{,}17\ \text{cm}^2$

120. **Cada uno de los 50 pisos de un edificio tiene la planta de esta figura, siendo el lado del hexágono de 30 m. Si el suelo tiene una moqueta que cuesta 20 €/m², calcula el precio total pagado por la moqueta del edificio.**



La apotema es: $a = \sqrt{30^2 - 15^2} = \sqrt{675} = 25{,}98$ m

$A_{\text{Hexágono}} = \dfrac{P \cdot a}{2} \rightarrow A = \dfrac{6 \cdot 30 \cdot 25{,}98}{2} = 2\,338{,}2\ \text{m}^2$

$A_{\text{Cuadrado}} = 30^2 = 900\ \text{m}^2$

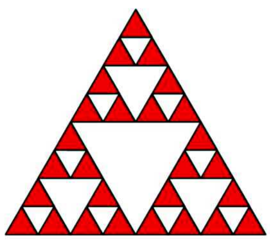
$A_{\text{Triángulo}} = \dfrac{30 \cdot 25{,}98}{2} = 389{,}7\ \text{m}^2$

El área de un piso mide: $2\,338{,}2 + 900 + 389{,}7 = 3\,627{,}9\ \text{m}^2$

La moqueta de un piso cuesta: $3\,627{,}9 \cdot 20 = 72\,558$ €

Y la moqueta de todo el edificio costará: $50 \cdot 72\,558 = 3\,627\,900$

121. **Hemos colocado una vidriera triangular. Calcula el área acristalada en color rojo, sabiendo que la ventana es un triángulo equilátero de lado 1 m.**



Cada triángulo rojo tiene 1/8 m de lado y es equilátero; por tanto, su altura es:

$$h = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 - \left(\frac{1}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{64} - \frac{1}{256}} = \frac{\sqrt{3}}{16} = 0{,}11 \text{ m}$$

$$A_t = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1/8 \cdot 0{,}11}{2} = 0{,}007 \text{ m}^2$$

Como hay 27 triángulos rojos, su área total es:

$$A = 27 \cdot 0{,}007 = 0{,}189 \text{ m}^2$$

122. El coste por metro cuadrado de impermeabilización asciende a 20 €. Calcula el coste para impermeabilizar cada una de estas superficies.

a) Azotea de forma hexagonal regular de lado 28 m y apotema 24,25 m.

b) Terraza exterior rectangular de ancho 14 m y largo 20 m.

c) Marco de 4 m de ancho alrededor de una piscina circular de 7 m de radio.

d) Jardín con forma de rombo de diagonales 18 m y 12 m.

e) Fachada con forma de trapecio rectángulo de altura 5 m y diagonales 6,4 m y 9,43 m.

f) Rincón en el baño que tiene forma de un cuarto de círculo de 1,5 m.

a) $A = \frac{28 \cdot 6 \cdot 24{,}25}{2} = 2\,037 \text{ m}^2$ Coste $= 20 \cdot 2\,037 = 40\,740$ €

b) $A = 14 \cdot 20 = 280 \text{ m}^2$ Coste $= 20 \cdot 280 = 5\,600$ €

c) $A = \pi(R^2 - r^2) = \pi(11^2 - 7^2) = 72\pi = 226{,}19 \text{ m}^2$ Coste $= 20 \cdot 226{,}19 = 4\,523{,}8$ €

d) $A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{18 \cdot 12}{2} = 108 \text{ m}^2$ Coste $= 20 \cdot 108 = 2\,160$ €

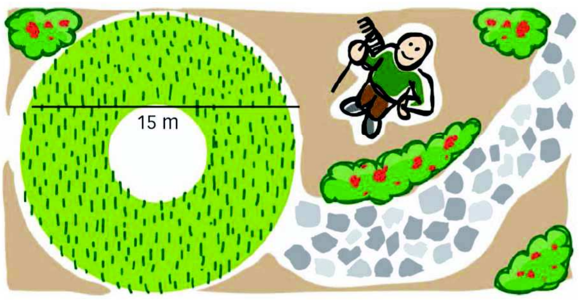
e) Se calculan primero las medidas de las bases, y luego el coste:

$B = \sqrt{9{,}43^2 - 5^2} = \sqrt{63{,}9249} \simeq 8$ $b = \sqrt{6{,}4^2 - 5^2} = \sqrt{15{,}96} \simeq 4$

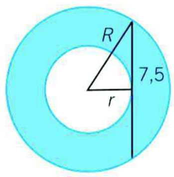
$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(8 + 4) \cdot 5}{2} = 30 \text{ m}^2$ Coste $= 20 \cdot 30 = 600$ €

f) $A = \frac{\pi r^2 \cdot 90}{360} = \frac{\pi \cdot 1{,}5^2}{4} = 1{,}77 \text{ m}^2$ Coste $= 20 \cdot 1{,}77 = 35{,}4$ €

123. Un jardinero ha plantado una zona de césped en forma de corona circular. La longitud del segmento mayor que puede trazarse en ella es de 15 m.



¿Qué área de césped ha plantado el jardinero?



El área que se pide es la de la corona circular:

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

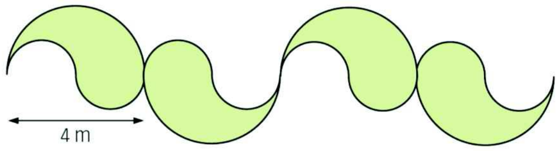
Como el segmento mide 15 cm, aplicamos el teorema de Pitágoras:

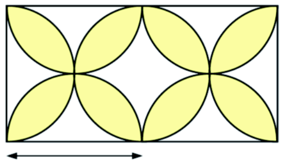
$$R^2 = r^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 \rightarrow R^2 - r^2 = 7{,}5^2$$

Sustituyendo, tenemos que:

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot 7{,}5^2 = 176{,}63 \text{ m}^2$$

124. Un pintor decora una valla con una de estas figuras.





Si cobra el metro cuadrado de valla pintada a 32 €, ¿cuánto cobrará por cada una?

Figura 1: La figura que forma la valla se repite cuatro veces, y su área coincide con la del semicírculo de radio 2 m, que es: $A = \pi \cdot 4 : 2 = 6{,}28$ m^2

Como son 4 figuras, el área mide 25,12 m^2 y el precio será:

$$25{,}12 \cdot 32 = 803{,}84 \text{ €}$$

Figura 2: Son 8 pétalos que podemos inscribir en un cuadrado de lado 5 m, siendo simétricos por la diagonal del cuadrado. El área de cada mitad es la de un sector circular de 90° y radio 5 m, a la que se resta el área de un triángulo de base y altura 5 m: $\frac{25\pi}{4} - \frac{5 \cdot 5}{2} = 7{,}125$ m^2

El área del pétalo es 14,25 m^2 y la unión de los 8 pétalos mide 114 m^2, con un coste de $114 \cdot 32 = 3\,648$ €.

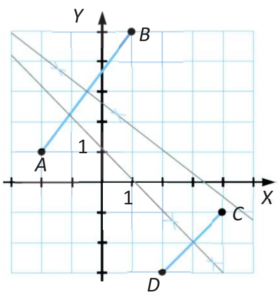
DEBES SABER HACER

1. Considera los puntos $A(-2, 1)$, $B(1, 5)$, $C(4, -1)$ y $D(2, -3)$. Dibuja estos lugares geométricos.

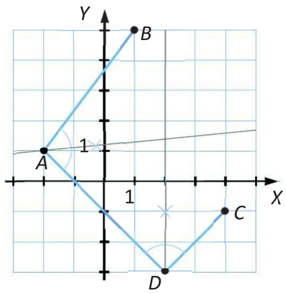
a) Las mediatrices de los segmentos *AB* y *CD*.

b) Las bisectrices de los ángulos $\widehat{ADC}$ y $\widehat{BAD}$.

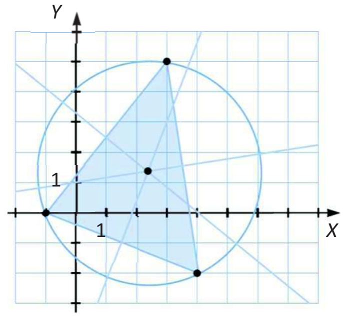
a)



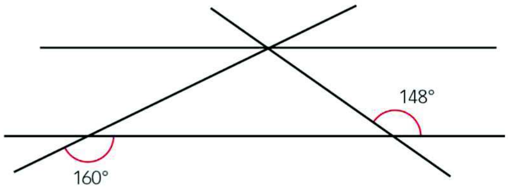
b)

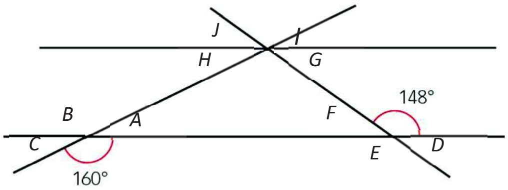


2. **Traza la circunferencia que pasa por estos puntos: (−1, 0), (3, 5) y (4, −2).**



3. **Averigua el valor de los ángulos que se forman.**





$A = 20° = C = I = H$ $B = 160°$ $E = 148°$ $F = 32° = D = J = G$

4. **Un triángulo equilátero tiene 57 cm de perímetro. Halla su altura.**

$P = 57 \rightarrow l = \dfrac{57}{3} = 19$ cm $h^2 + 9{,}5^2 = 19^2 \rightarrow h = \sqrt{361 - 90{,}25} = 16{,}45$ cm

5. **Calcula el perímetro y la diagonal de un cuadrado cuya área es 156,25 cm².**

$l^2 = 156{,}25 \rightarrow l = \sqrt{156{,}25} = 12{,}5$ cm

$P = 4 \cdot 12{,}5 = 50$ cm

$d = \sqrt{12{,}5^2 + 12{,}5^2} = 17{,}68$ cm

6. **El área de un rombo es 390 dm² y una de sus diagonales mide 30 dm. Calcula la otra diagonal y el perímetro del rombo.**

$A = 390 = \dfrac{30 \cdot d}{2} \rightarrow d = \dfrac{390 \cdot 2}{30} = 26$ dm

$l = \sqrt{15^2 + 13^2} = 19{,}85$ dm

$P = 4l = 4 \cdot 19{,}85 = 79{,}4$ dm

7. Considera un hexágono regular cuya apotema mide 25 cm. Calcula su perímetro y su área.

$$l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = 25^2 \rightarrow \frac{3l^2}{4} = 625 \rightarrow l = \sqrt{\frac{625 \cdot 4}{3}} = 28,87 \text{ cm}$$

$$P = 6l = 6 \cdot 28,87 = 173,22 \text{ cm}$$

$$A = \frac{173,22 \cdot 25}{2} = 2\,165,25 \text{ cm}^2$$

8. Halla el área de la corona circular limitada por las circunferencias circunscrita e inscrita de un cuadrado de lado 9 cm.

El radio de la circunferencia inscrita es $r = 9 : 2 = 4,5$ cm.

El radio de la circunferencia circunscrita es:

$$R = \sqrt{4,5^2 + 4,5^2} = 6,36 \text{ cm}$$

$$A = \pi\left(6,36^2 - 4,5^2\right) = 63,62 \text{ cm}^2$$

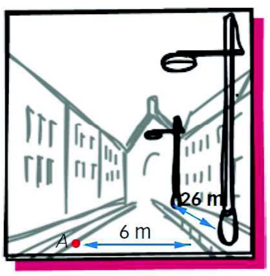
COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

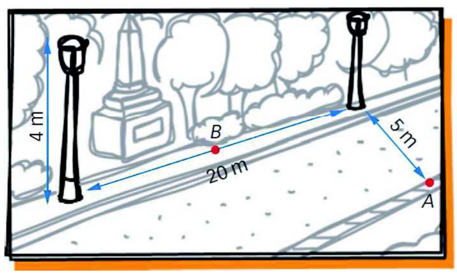
125. La iluminancia es la cantidad de luz que llega a una unidad de superficie y se suele medir en lux. Estos son los niveles de lux más comunes:

– Verano, a mediodía, bajo un cielo despejado	**100 000 lux**
– Alumbrado de calle	**5-30 lux**
– Luna llena, en una noche clara	**0,25 lux**

En general, la iluminancia es menor cuanto mayor sea la distancia a la que se encuentra el objeto que queremos iluminar.

- **Estas imágenes corresponden a dos proyectos de iluminación. El primero, para una calle en la que se van a colocar bombillas capaces de iluminar hasta 11 m, y el otro, para un parque en el que se van a utilizar bombillas para 12 m.**





¿Llegarán los lux hasta los puntos marcados, el ancho de la acera (A) y el punto medio entre las dos farolas (B), en los proyectos?

En el caso primero, en la calle, y con la farola que está más cerca del punto *A:*

Llamando h a la distancia del suelo al punto donde está la bombilla dentro de la farola, se tiene: $6^2 + h^2 = 11^2 \rightarrow h = \sqrt{121 - 36} = 9,21 \text{m}$. Esto es, los lux llegarán al punto *A* siempre que la altura de la bombilla sea menor o igual que 9,21 m.

Desde la farola más lejana a *A* es imposible que lleguen los lux, ya que hay una distancia muy superior a 11 m.

En el segundo caso, en el parque, llamando *D* a la distancia del punto más alto de la farola más alejada de *A* hasta *B*, se tiene: $D^2 = 4^2 + 10^2 \to D = \sqrt{116} = 10{,}77 \text{ m}$. Es decir, sí llegarán los lux al punto *B.*

Sea *d* la distancia desde el punto más alto de la farola más cercana a *A* hasta *A*: $d^2 = 4^2 + 5^2 \to d = \sqrt{41} = 6{,}4 \text{ m}$.

Por tanto, también llegarán los lux al punto *A.*

FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

126. Dados dos segmentos, *AB* y *CD,* de longitud *d* como en la figura, ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos situados entre *A* y *C* cuya distancia a *B* es *d*?

El lugar geométrico es el de los puntos del arco de circunferencia que pasa por *A* y *C* con centro en *B* y radio *d.*

127. ¿Cuál de estas opciones es la relación entre el lado y la altura de un triángulo equilátero?

a) $h = \dfrac{\sqrt{3l}}{2}$ b) $h = \sqrt{\dfrac{3l}{2}}$ c) $h = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$

Sea *h* la altura y *l* el lado.

$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \to h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \to h^2 = \frac{3l^2}{4} \to h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto la respuesta es la opción c).

128. ¿Cuál es la relación entre las áreas de un triángulo equilátero y un cuadrado que tienen el mismo perímetro? ¿Qué relación tienen los perímetros si lo que es igual son las áreas?

Sea *l* el lado del triángulo equilátero y *L* el lado del cuadrado.

– Igualando perímetros: $P_{Tr} = P_C \to 3l = 4L \to l = \dfrac{4L}{3}$.

Se escribe la expresión de la altura del triángulo:

$$\left.\begin{array}{l} h = \dfrac{l\sqrt{3}}{2} \\ l = \dfrac{4L}{3} \end{array}\right\} \to h = \frac{\frac{4L}{3}\sqrt{3}}{2} = \frac{2L\sqrt{3}}{3}$$

Se calcula el área del triángulo obteniéndose la relación con el área del cuadrado:

$$A_{Tr} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{\frac{4L}{3} \cdot \frac{2L\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{9}L^2 \to A_{Tr} = \frac{4\sqrt{3}}{9}A_C$$

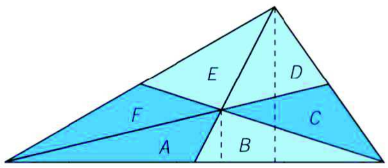
– Igualando áreas:

$$A_{Tr} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = A_C = L^2 \to l^2 = \frac{4L^2}{\sqrt{3}} \to l = \sqrt{\frac{4L^2}{\sqrt{3}}} = \frac{2L}{\sqrt[4]{3}}$$

Se calcula el perímetro del triángulo obteniéndose la relación con el perímetro del cuadrado:

$$P_{Tr} = 3l = 3 \cdot \frac{2L}{\sqrt[4]{3}} = 3 \cdot \frac{4L}{2\sqrt[4]{3}} = 3 \cdot \frac{P_C}{2\sqrt[4]{3}} \to P_{Tr} = \frac{3}{2\sqrt[4]{3}}P_C$$

129. En un triángulo cualquiera se trazan sus medianas, formándose 6 triángulos que tienen como vértice común el baricentro. Justifica que todos tienen la misma área. A partir de este resultado, demuestra que el baricentro dista de cada vértice el doble que del punto medio del lado opuesto.



Las bases de los triángulos A y B miden lo mismo (por la definición de mediana), y como su altura es igual, sus áreas coinciden.
Es decir, $S_A = S_B$, $S_C = S_D$, $S_E = S_F$.

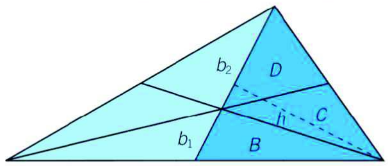
Considerando el triángulo total y, por el mismo razonamiento:

$$S_A + S_B + S_C = S_D + S_E + S_F$$

Como $S_C = S_D \rightarrow S_A + S_B = S_E + S_F \xrightarrow{S_A = S_B;\, S_E = S_F} 2S_A = 2S_E \rightarrow S_A = S_E$

Por tanto, $S_A = S_B = S_E = S_F$, y repitiendo el razonamiento con cualquier mediana, obtenemos que son iguales a S_C y S_D:

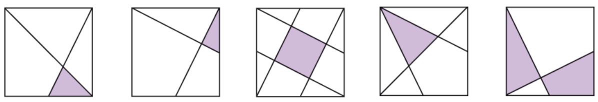
$$S_A = S_B = S_C = S_D = S_E = S_F$$

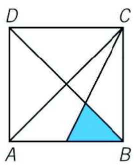


Como $S_B = \dfrac{b_1 \cdot h}{2}$ y $S_C + S_D = \dfrac{b_2 \cdot h}{2}$ y, además, $S_B = S_C = S_D$, deducimos

que: $2\left(\dfrac{b_1 \cdot h}{2}\right) = \dfrac{b_2 \cdot h}{2} \rightarrow \cancel{2}\left(\dfrac{b_1 \cdot h}{\cancel{2}}\right) = \dfrac{b_2 \cdot h}{2} \rightarrow b_1 = \dfrac{b_2 \cdot \cancel{h}}{2 \cdot \cancel{h}} = \dfrac{b_2}{2}$

130. Los segmentos interiores trazados son diagonales o unen vértices con puntos medios de lados opuestos. ¿Qué fracción del área del cuadrado está sombreada?

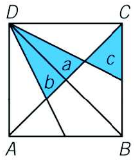




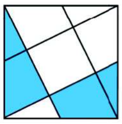
Tomando el triángulo *ABC,* el área coloreada es uno de los 6 triángulos que se forman al cortar sus medianas. Estos triángulos son iguales, siendo una sexta parte de la mitad del cuadrado, y su fracción es $\dfrac{1}{12}$

Para el tercer caso se forman 4 triángulos iguales, 4 trapecios iguales y 1 cuadrado. Por semejanza de triángulo, el cateto mayor de los triángulos coincide con el lado del cuadrado, y el cateto menor de los triángulos coincide con la base mayor de los trapecios. Por tanto, si unimos un trapecio con un triángulo formamos un cuadrado idéntico al coloreado, por lo que el cuadrado total equivale a 5 cuadrados como el coloreado y la fracción es $\dfrac{1}{5}$.

Para el segundo caso, según lo expuesto en el tercer caso, el triángulo es la tercera parte del trapecio y la cuarta del cuadrado, por lo que su fracción es $\dfrac{1}{20}$.

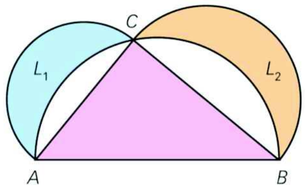


Como en la primera solución, el área c y el área a son triángulos formados por la unión de las medianas, por lo que su área es $\frac{1}{12}$ del total y la superficie azul es el doble que el área a, siendo su fracción $\frac{1}{6}$.



Como en la segunda solución, tenemos el equivalente a 2 cuadrados centrales, y la fracción es $\frac{2}{5}$.

131. **¿Qué es mayor, el área del triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ o la suma de las áreas de L_1 y L_2? (Las circunferencias que ves tienen como diámetro cada uno de los lados del triángulo).**



Si A_1 y A_2 fuesen las áreas de los semicírculos completos correspondientes a L_1 y L_2, las áreas de los tres semicírculos serían:

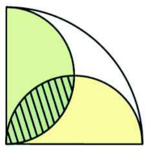
$$A_1 = \frac{\pi r_1^2}{2} \qquad A_2 = \frac{\pi r_2^2}{2} \qquad A_3 = \frac{\pi r_3^2}{2}$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$A_1 + A_2 = \frac{\pi r_1^2}{2} + \frac{\pi r_2^2}{2} = \frac{\pi (r_1{}^2 + r_2{}^2)}{2} = \frac{\pi r_3^2}{2} = A_3$$

Como el área que le falta al triángulo para ser igual que el semicírculo mayor es la que le falta a L_1 y L_2, las áreas de L_1 y L_2 serán iguales que la del triángulo.

132. **Observa la figura y compara las áreas de la zona rayada y de la zona blanca.**



Si r es el radio del cuarto del círculo mayor, $r/2$ es el radio de los dos semicírculos menores, y sus áreas son:

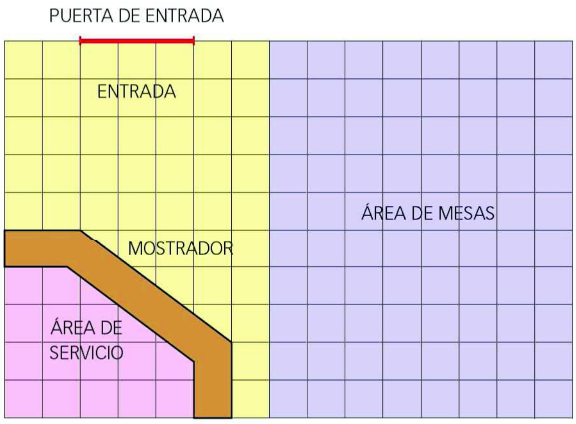
$$A_1 = \frac{\pi \cdot r^2}{4} \quad A_2 = A_3 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \cdot r^2}{8}$$

$$A_2 + A_3 = \frac{\pi \cdot r^2}{4} = A_1$$

Como el área del cuarto del círculo es la misma que la suma de las áreas de los semicírculos, su intersección, que es la zona rayada, es igual que la zona blanca, que es exterior a los semicírculos.

PRUEBAS PISA

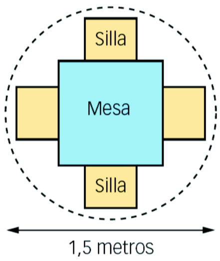
133. Este es el plano de la heladería de María. Está renovando la tienda. El área de servicio está rodeada por el mostrador.



Nota: Cada cuadrado de la cuadrícula representa 0,5 metros × 0,5 metros.

a) María quiere colocar un nuevo borde a lo largo de la parte externa del mostrador. ¿Cuál es la longitud total del borde que necesita?

b) María también va a poner un nuevo revestimiento para suelo en la tienda. ¿Cuál es la superficie (área) total del suelo de la tienda, excluidos el área de servicio y el mostrador?



c) María quiere tener en su tienda conjuntos de una mesa y cuatro sillas como el que se muestra más arriba. El círculo representa la superficie de suelo necesaria para cada conjunto.

Para que los clientes tengan suficiente espacio cuando estén sentados, cada conjunto (tal y como representa el círculo) debe estar situado según las siguientes condiciones:

- **Cada conjunto debe estar situado, al menos, a 0,5 metros de las paredes.**
- **Cada conjunto debe estar situado, al menos, a 0,5 metros de los otros conjuntos.**

¿Cuál es el número máximo de conjuntos que María puede colocar en la zona de mesas sombreada de su tienda?

(Prueba PISA 2010)

a) Llamando *d* a la longitud de la parte exterior oblicua del mostrador, se tiene:

$d^2 = 2^2 + 1{,}5^2 \rightarrow d = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ m $\qquad$ Longitud $= 1 + d + 1 = 2 + 2{,}5 = 4{,}5$ m

b) Área total =
= Área a la derecha del mostrador de 4,5 m × 5 m + Área por encima del mostrador de 2,5 m × 3 m +
+ Área del triángulo rectángulo de catetos 2 m y 1,5 m situado por encima del lado oblicuo del mostrador:

$$A = 4{,}5 \cdot 5 + 3 \cdot 2{,}5 + \frac{2 \cdot 1{,}5}{2} = 22{,}5 + 7{,}5 + 1{,}5 = 31{,}5 \text{ m}^2$$

c) A la izquierda de la zona de mesas no hay pared, por lo que el requerimiento de “a 0,5 m de la pared” se aplica a la pared de la derecha, a la de arriba y a la de abajo en el dibujo. Con ello queda una zona de 4 m × 3,5 m. Como el círculo de cada conjunto tiene un diámetro de 1,5 m y entre los círculos debe haber mínimo 0,5 m, se pueden colocar dos conjuntos arriba y otros dos abajo (ancho = alto = 1,5·2 +0,5 = 3,5).