FUNCIONES CUADRÁTICAS y NO TRIGONOMÉTRICAS

① a) $f(x) = 3(x+1)^2 - 12 = 3\cdot(x^2+2x+1) - 12 = 3x^2+6x+3-12 = \boxed{3x^2+6x-9}$ cqd.

b) i) Eje x $\rightarrow \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{6} = \boxed{-1}$

$f(-1) = -12$ $\boxed{P_{\text{vértice}}(-1,-12)}$

tb. $f(x) = 3(x+1)^2 - 12$

$P(0,0)$ desplazado 1 unidad izquierda

desplazado verticalmente -12 unidades $\downarrow$.

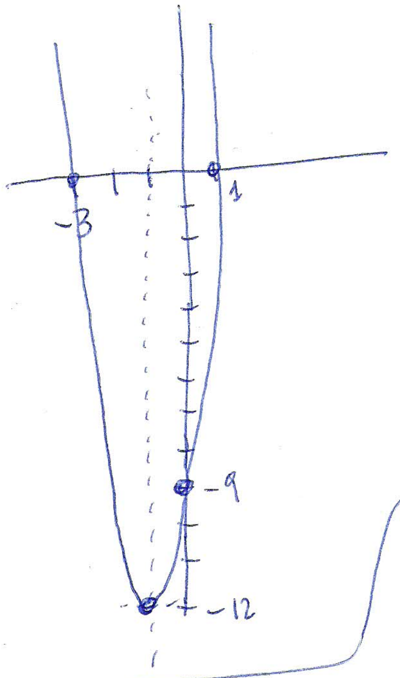
ii) y-intercept $\rightarrow x=0 \rightarrow f(0) = -9$

$\boxed{P_{\text{y-intercept}}(0,-9)}$

iii) x-intercepts $\rightarrow y=0$

$0 = 3x^2+6x-9 \rightarrow x = \frac{-6\pm\sqrt{36+4\cdot3\cdot9}}{6} = \frac{-6\pm\sqrt{36+108}}{6} = \frac{-6\pm12}{6}$ $x_1 = \boxed{-3}$ $x_2 = \boxed{1}$

c)



d) $g(x) = x^2$

$\boxed{t=3}$

$f(x) = 3(x+1)^2 - 12$

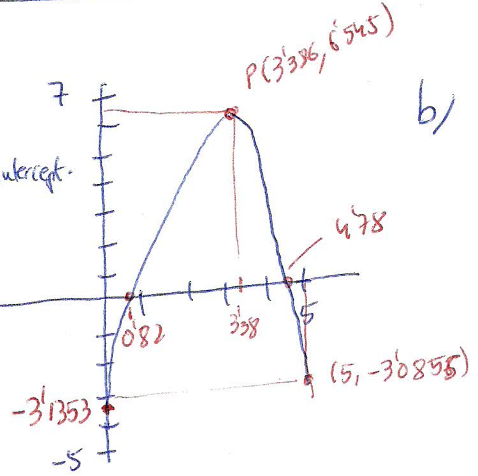
stretching. horiz. vertical

$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ horizontal vertical $\rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ -12 \end{pmatrix}}$

② a) x-intercepts $\rightarrow y=0 \rightarrow$ con C.G.

$\boxed{P(0'82, 0) \text{ y } Q(3'39, 6'55)}$

$P(0,-3'1353)$ = y-intercept.



b)

c) gradient at $x=3 \rightarrow f'(3) \rightarrow$ con C.G.

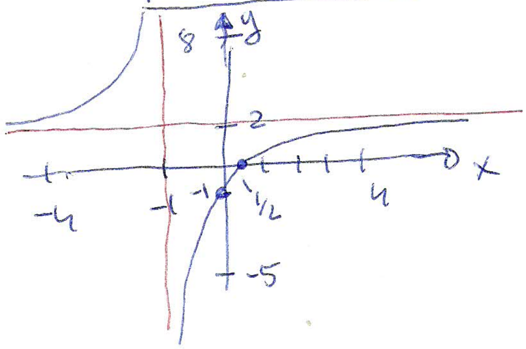
$f'(3) = \boxed{1'28}$

③ $y = \frac{2x-1}{x+1}$; $x \neq -1$

a) $h^{-1}(x) \rightarrow x = \frac{2y-1}{y+1} \rightarrow xy + x = 2y - 1 \rightarrow x+1 = 2y - xy \rightarrow x+1 = y(2-x) \rightarrow$

$\rightarrow \frac{x+1}{2-x} = y \rightarrow \boxed{h^{-1}(x) = \frac{x+1}{2-x}}$

b) i) Con C.G $\rightarrow$



ii)

AH $\rightarrow$ $\boxed{y=2}$

AV $\rightarrow$ $\boxed{x=-1}$

iii) x intercept $\rightarrow$ $\boxed{x = \frac{1}{2}}$ $P(\frac{1}{2}, 0)$

---

④ a) i) $\rightarrow t=0 \rightarrow f(0) = \boxed{106}$ (m)

ii) $\rightarrow t=5 \rightarrow f(5) = \boxed{26.4}$ (m)

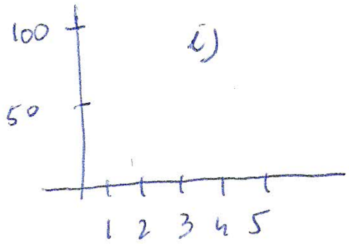
iii) $f(t) = 30 \rightarrow -0'25t^3 - 2,32t^2 + 1,93 \cdot t + 106 = 30 \rightarrow$ Con C.G

$\boxed{t = 4,91}$ (s)

b) i) $g(t) = -5,2t^2 + 9,5t + 100 \Rightarrow 0$ when hits the ground.

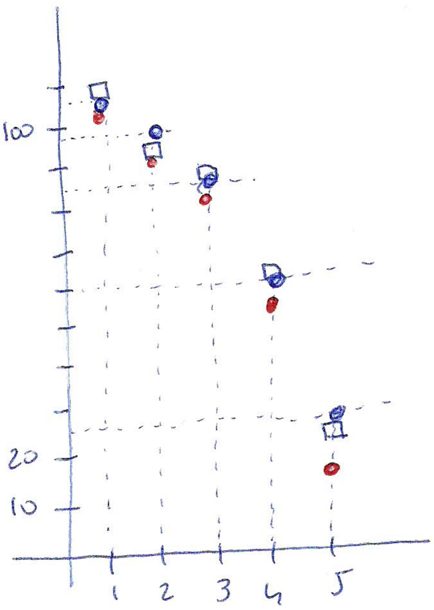
$-5.2t^2 + 9.5t + 100 = 0 \rightarrow$ Con C.G. $\rightarrow \boxed{t = 5'39}$ (s)

c) ~~iii~~ i)



ii)

Es mejor la de Jane. Se ajusta mejor a los puntos de la tabla. La de Kevin se separa más.



• = gráfica tabla

JANE = □

Kevin = •

Usando CG. Representas la función y sacar valores para la y en diferentes x. (así + rápido)

5

a) $h=2$

$k=3$

b) $7=a(\cancel{1}-2)^2+3 \rightarrow 7=a+3$; $\boxed{a=4}$

6

a) AV $\rightarrow$ $x-q=0 \rightarrow \boxed{x=q}$

AH $\rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{x-q}=3 \rightarrow \boxed{y=3}$

b) $q=1$

c) $Q(1,3)$
$P(x,y)$

$|\overline{PQ}|=\sqrt{(x-1)^2+\left(\dfrac{3}{x-1}\right)^2}$ c.q.d.

$\vec{PQ}=(x-1,\,y-3) \rightarrow \left(x-1,\, \dfrac{3x}{x-1}-3\right) \rightarrow \left(x-1,\, \dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{3(x-1)}{x-1}\right) \rightarrow$

$\left(x-1,\, \dfrac{\cancel{3x}-\cancel{3x}+3}{x-1}\right)$

d) El punto + próximo significa q hay un mínimo a PQ $\rightarrow$ la derivada d PQ $=0$.
$(PQ)'(x)=0$

Con CG $\rightarrow$ dibujar funci PQ
hallar mínimo $\rightarrow x=-0'73205$
$\rightarrow x=2'73205$

Coordenadas tb. con C.G.

$P_1(-0'73205,\,1'267949)$

$P_2(2'73205,\,4'73205)$

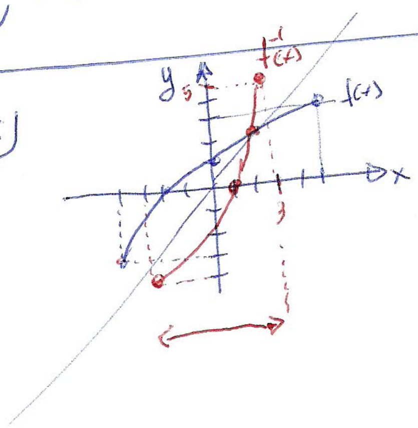
7

a) i) $f(-3)=-1$

ii) $f^{-1}(1)=0$

b) Dom $f^{-1}(x)=[-3,3]$

c)



8

a) i) $\boxed{\Delta=36-12p}$

ii) 2 raíces iguales $\Rightarrow \Delta=0$; $36-12p=0 \rightarrow \dfrac{36}{12}=p$; $\boxed{p=3}$

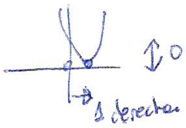
b) Si situado sobre eje x $\rightarrow y=0 \rightarrow$ Una doble solución $\rightarrow \Delta=0$

$V_x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{6}{6}=1$; $x=1$; $f(1)=3-6+3=0$; $\boxed{V(1,0)}$

8 cont.

c) $0 = 3x^2 - 6x + 3 \rightarrow \boxed{x = 1}$

d) $a = 3$ Vértice $(1,0)$



$h = 1$

$k = 0$

e) $g(x) = f(x) \times (-1) + \binom{0}{6}$; $f(x) = 3(x-1)^2$

$g(x) = -3(x-1)^2 + 6 \rightarrow \boxed{g(x) = -3(x^2 - 2x + 1) + 6 = -3x^2 + 6x + 3}$

---

9 a) $0 = 5 - x^2 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$ → tb. con C.G. representándola y hallando los punt.

$\alpha = -\sqrt{5}$

$\beta = +\sqrt{5}$

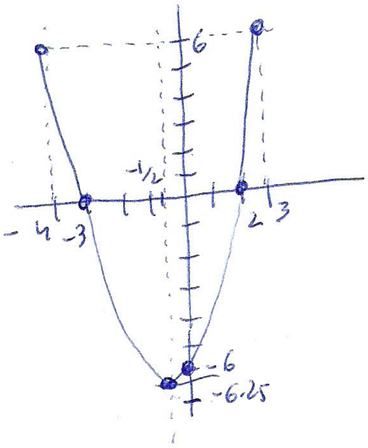
b) $V = \pi \int_{-\sqrt{5}}^{+\sqrt{5}} (5 - x^2)^2 \cdot dx = \longrightarrow$ con C.G $= \boxed{187'33}$

---

10 a) $x = 0 \longrightarrow f(0) = -6 \longrightarrow \boxed{P(0,-6)}$

b) $x^2 + x - 6 = 0 \longrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$ $\begin{cases} x_1 = \boxed{-3} \\ x_2 = \boxed{2} \end{cases}$

c) $V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2}$



$f(3) = 9 + 3 - 6 = 6$

$f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} - 6 =$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{12}{2} =$

$= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} - \frac{24}{4} = \frac{-25}{4} = -6'25$

---

11 a) $\boxed{q = 3}$

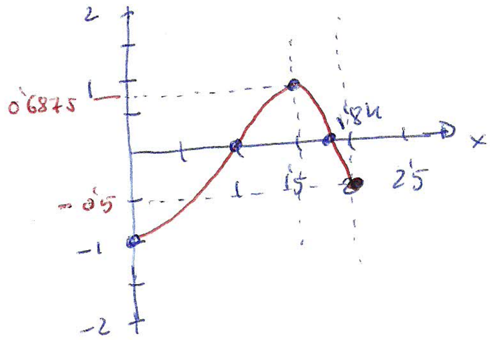
b) $4 = p + \frac{9}{\cancel{0} - 3}$; $4 = p - 3$; $\boxed{p = 7}$

c) $\boxed{y = 7}$ $\lim_{x \to \infty} 7 + \frac{9}{x-3} = 7$

12 a) $(f \circ g)(x) = 2x^3 + 3$

b) $2x^3 + 3 = 0 \rightarrow x^3 = \frac{-3}{2} \rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{\frac{-3}{2}}}$

13 a) con C.G.



b) $0 = -x^4 + 2x^3 - 1$

↓

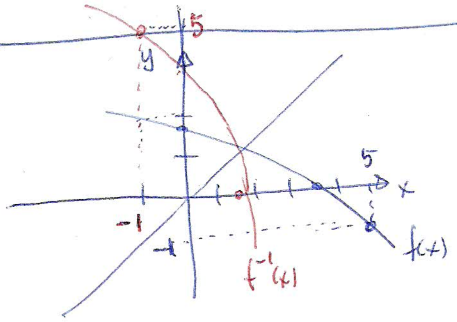
ROOTS

$\boxed{x = 1}$

$\boxed{x = 1'84}$

c) $V = \pi \int_1^{1'84} (-x^4 + 2x^3 - 1)^2 \cdot dx \xrightarrow{C.G} = \boxed{0'637}$ 3 c.s.

14 a)



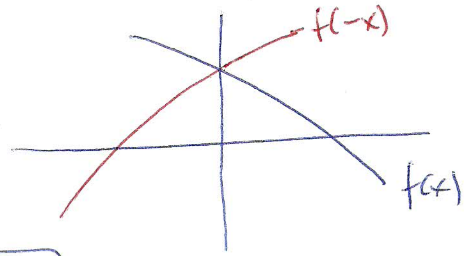
$\boxed{f^{-1}(-1) = 5}$

b) $(f \circ f)(-1) = f(\underline{f(-1)})$ → en la grafica de f → $f(-1) = 2$

luego $f(\underbrace{f(-1)}_{2}) = f(2)$ → en la grafica de f → $f(2) = \boxed{1}$

luego $(f \circ f)(-1) = \boxed{1}$

c)



15 a) $\Delta = (10-p)^2 - 4 \cdot p\left(\frac{5}{4}p - 5\right)$

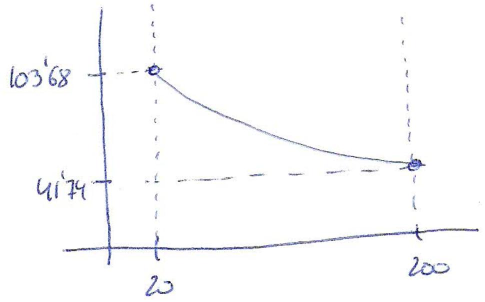
$\Delta = 100 - \cancel{20p} + p^2 - 5p^2 + \cancel{20p} = \boxed{100 - 4p^2}$ c.q.d.

b) Si 2 equal roots → $\Delta = 0$

$0 = 100 - 4p^2 \rightarrow 25 = p^2 \rightarrow \boxed{p = \pm 5}$

~~$p = \pm\sqrt{5}$~~

16 a) C.G.



b) $n=45 \rightarrow G(45) = 95 \cdot e^{(-0'02 \cdot 45)} + 40 = 78'624117$ \$/Guest

C.G.

cost per guest.

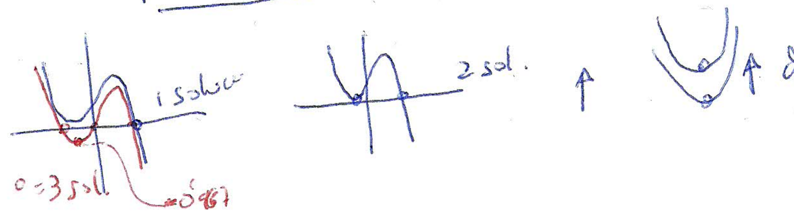
COSTE TOTAL para 45 invitados: $78'624117 \times 45 = \boxed{3538,09\ \$}$

$\boxed{3540\ \$}$ 3 s.f.

17 a) Representando con C.G y hallando el mínimo

$\boxed{M(-0'3, -0'967)}$

b)



luego $\boxed{K > 0'967}$; si es igual, tendría 2 soluciones. y si es mayor solamente una.

18 $f(x) = a(x+3)(x-1) \rightarrow$ está factorizada, luego las soluciones son $x=-3$ y $x=1$

a) $\boxed{\begin{array}{c} p=-3 \\ q=1 \end{array}}$

ii) $P(0,12) \rightarrow 12 = a(0+3)(0-1) \rightarrow 12 = a \cdot 3 \cdot (-1)$; $12 = -3a$

$\boxed{a=-4}$

b) vértice(x) en $\cancel{\frac{1-(-3)}{2}} = 12$ $\cancel{\Delta<(\ldots)}$ en $\frac{-3+1}{2} = \boxed{-1}$ $\frac{x_1+x_2}{2}$

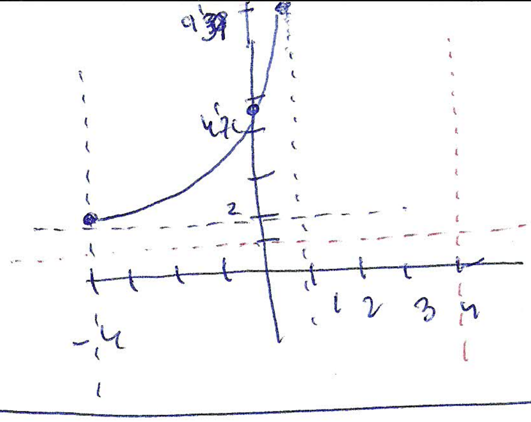
ecuación eje simetría $\boxed{x=-1}$

c) $f(-1) = -4 \cdot (-1+3)(-1-1) = -4 \cdot (2) \cdot (-2) = \boxed{16}$

d) $h = -1$

$K = 16$

(19)



$$g(x) = f(x-3) - 1$$
$$= e^{(x-3)+1} + 2 - 1 = \boxed{e^{x-2} + 1}$$

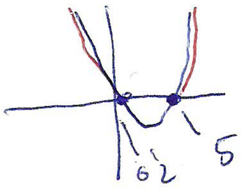
---

(20) $f(x) = g(x) \Rightarrow kx^2 + kx = x - 0'8 \Rightarrow kx^2 + x(k-1) + 0'8 = 0$

$\Delta > 0$

$\Delta = (k-1)^2 - 4 \cdot k \cdot 0'8 = k^2 - 2k + 1 - 3'2k = k^2 - 5'2k + 1 \Rightarrow > 0$

Con C.G.



posibles valores de k hacen la expresión > 0

Sol $\boxed{k \in (-\infty, 0'2) \cup (5, \infty)}$

---

(21) $y = (x-5)^3$

a) $x = (y-5)^3$; $\sqrt[3]{x} = y - 5 \rightarrow \boxed{\sqrt[3]{x} + 5 = y} \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} + 5}$

b) $(f \circ g)(x) = f(\underline{g(x)}) = (g(x) - 5)^3 \Rightarrow 8x^6$

$f(x) = (x - 5)^3 \longrightarrow$

$g(x)$

$$(g(x) - 5)^3 = 8x^6$$
$$g(x) - 5 = \sqrt[3]{8x^6}$$
$$\boxed{g(x) = 2x^2 + 5}$$

---

(22) a) $\boxed{h = 1}$ $\boxed{k = -9}$

b) $f(x) = (x-1)^2 - 9 \Rightarrow \cancel{x} = 0 \Rightarrow f(0) = (0-1)^2 - 9 = 1 - 9 = \boxed{-8}$

$\boxed{c = -8}$

c) $3 - 1 = 2 \Rightarrow \boxed{p = 2}$

$1 - (-9) = 10 \Rightarrow \boxed{q = 10}$

22 CONT.

a punto de corte $f(x)=g(x)$

$(x-1)^2-9=-(x-3)^2+1$

$x^2-2x+1-9=-(x^2-6x+9)+1$; $x^2-2x-\cancel{8}=-x^2+6x-\cancel{8}$

$2x^2-8x=0$; $2x(x-4)=0$ $\boxed{x_1=0}$ $\boxed{x_2=4}$ x-coord. punto intersección

---

23 a) No ∃ log de nºs negativos ; $\nexists \log(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}^-$

luego la asíntota vertical está en $\boxed{x=3}$

b) $0=2\cdot\ln(x-3)$; $0=\ln(x-3)$; $e^0=x-3$; $1=x-3$; $\boxed{x=4}$

tb gráficamente se puede hacer.

c) $V=\pi\int_4^{10}\left[2\ln(x-3)\right]^2\cdot dx$ → con C.G

$V=\boxed{141{,}54}$

---

24 a) $g(2)=4\cdot 2=\boxed{8}$

b) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=8\cdot(4x)+3=\boxed{32x+3}$

c) $y=8x+3$

$x=8y+3 \rightarrow \frac{x-3}{8}=y \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=\frac{x-3}{8}}$

---

25 $f(x)=x^2+qx+r$. Si tiene un mínimo se da en el vértice, o en la derivada $=0$.

a) $V_x=\frac{-b}{2a} \Rightarrow -1'5=\frac{-q}{2} \Rightarrow -3=-q$; $\boxed{q=3}$

Vértice en el punto medio de los 2 ceros. $\frac{9}{2}=4'5$; $\begin{cases} V_x+4'5=-1'5+4'5=\boxed{3} \\ V_x-4'5=-1'5-4'5=\boxed{-6} \end{cases}$

b) $f(x)=x^2+3x+r$

$0=3^2+3\cdot 3+r \Rightarrow \boxed{r=-18}$

26 a/ Si tiene un máximo $f'(x)=0$

$$0=\frac{6-2x}{6x-x^2} \rightarrow 0=6-2x \rightarrow \boxed{x=3} = P_x$$

$P(3, \ln 27)$

b/ $f(x)=\int f'(x)\cdot dx = \int \frac{6-2x}{6x-x^2}\cdot dx = \boxed{\ln(6x-x^2)+C}$ || $\int \frac{u'}{u}\cdot dx = \ln u$

El punto $P \in f(x)$

$\ln 27 = \ln(6\cdot 3 - 3^2)+C$

$\ln 27 = \ln 9 + C \rightarrow \ln 27 - \ln 9 = C \rightarrow \ln \frac{27}{9} = C$; $\boxed{C=\ln 3}$

Luego $f(x) = \ln(6x-x^2)+\ln 3 = \ln((6x-x^2)\cdot 3) = \boxed{\ln(18x-3x^2)}$

c/ coordenada x → No se mueve luego $\boxed{a=3} = x$

Veamos su y transformada.

Nueva función $= \frac{1}{\ln 3}\cdot(f(x)) = \frac{\ln 27}{\ln 3} = \frac{3\cancel{\ln 3}}{\cancel{\ln 3}} = \boxed{3}$

↓ el valor de y cuando $x=3$ es $\ln 27$, sustituyendo

$\boxed{a=3}$
$\boxed{b=3}$

c/ $f(x)=(x-2)(x-4)$; Si $x=0$

$f(0)=(-2)\cdot(-4)= \boxed{8}$

$\boxed{P(0,8)}$

27 a/ $h=3$
$k=-1$

b/ $a=2$
$b=4$

28 $h(x)=f(g(x)) = 6\cdot\cos x\cdot\sqrt{1-\cos^2 x} =$

$\rightarrow 6\cdot\cos x\cdot\sqrt{\operatorname{sen}^2 x} = 6\cos x\cdot\operatorname{sen} x = 3\cdot\underline{2\cos x\cdot\operatorname{sen} x}$

$= \boxed{3\cdot\operatorname{sen}(2x)}$

a/

b/ $\boxed{\text{Recorrido } [-3,+3]}$

recorrido de $\operatorname{sen} x \rightarrow [-1,1] \rightarrow \times 3$.

(29)

a/ i) $x=0 \to y=e^{0'5\cdot 0}-2 = e^0-2=1-2=-1$ $\boxed{P(0,-1)}$

tb. con C.G.

ii) $y=0 \to 0=e^{0'5x}-2$;

$2=e^{0'5x} \to \ln 2 = 0'5 \cdot x \cdot \ln e \to \frac{\ln 2}{0'5}=x \to \frac{\ln 2}{\frac{1}{2}} = \boxed{2\ln 2}$

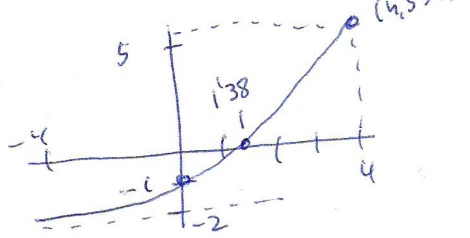
$\boxed{Q(2\ln 2, 0)}$ tb. con C.G.

iii) $\lim_{x\to+\infty} e^{0'5\cdot x}-2=\infty$

$\lim_{x\to-\infty} e^{0'5\cdot x}-2=\boxed{-2}$ AH en $\boxed{y=-2}$

tb. con C.G.

b/ con C.G. tb.



$2\ln 2 \simeq 1'38$

---

(30) a/ $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1}+2 = 2 \to \boxed{y=2}$ A.H.

b/ $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$

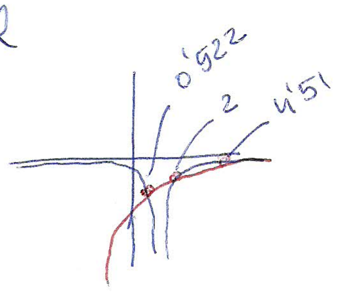
c/ $\lim_{x\to\infty} a\cdot \underset{\downarrow\atop 0}{e^{-x}}+b=b$; como son iguales $\boxed{b=2}$

d/ $g'(x)=a\cdot e^{-x}\cdot(-1)=-a\cdot e^{-x} \Rightarrow g'(1)=-a\cdot e^{-1} \Rightarrow -e$

$\frac{-a}{e}=-e \Rightarrow -a=-e^2 \Rightarrow \boxed{a=e^2}$

e/ Si tienen misma pendiente → derivada es igual

$\frac{-1}{(x-1)^2}=-e^2\cdot e^{-x} \to$ con C.G.



Valor entre $1<x<4$

$\boxed{x=2}$

31 a) $V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$ $\longrightarrow$ eje de simetría $\boxed{x=2}$

b) $\boxed{h=2}$

Coordenada y del vértice $\quad f(2) = 2^2 - 4\cdot 2 + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$; $\boxed{V(2,1)}$

$\boxed{K=1}$

---

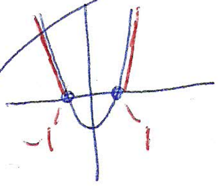
32 $f(x) = y \rightarrow m - \frac{1}{x} = x - m \xrightarrow[x(x)]{} mx - 1 = x^2 - mx \rightarrow \boxed{0 = x^2 - 2mx + 1}$

Si son 2 puntos distintos, el $\Delta > 0$

$\Delta = 4m^2 - 4\cdot 1 = 4m^2 - 4 = 4(m^2-1) \Rightarrow 4(m^2-1) > 0$

Con ~~C.G~~

vemos cuando es >0 (+vo)



No válido.

Es P1

(sin calculadora

Es mayor q 0

cuando $\boxed{m \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)}$

tb. con diagrama d signos.. pero tenemos C.G

Hacemos diagrama d signos.

1º factorizamos

$4(m-1)(m+1) > 0$

		-1		1	
$(m-1)$			$-$		$+$
$(m+1)$	$-$		$+$		
$4(m-1)(m+1)$	$+$		$-$		$+$

$\boxed{\text{Sol } m \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)}$

---

33 a) $f(8) = 8^2 + 2\cdot 8 + 1 = \boxed{81}$

b) $g(f(x)) = (x^2+2x+1) - 5 = \boxed{x^2+2x-4}$

c) $x^2 + 2x - 4 = 0$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2}$ $\quad x_1 = \boxed{-1+\sqrt{5}}$ $\quad x_2 = \boxed{-1-\sqrt{5}}$

tb. con C.G. rápidamente.

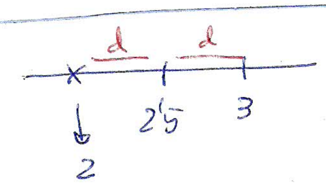
34 a) $y = 5x \rightarrow x = 5y \rightarrow \frac{x}{5} = y \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{x}{5}}$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 5 \cdot (x^2+1)$

$(f \circ g)(7) = 5 \cdot (7^2+1) = \boxed{250}$

---

35 a) $\boxed{p=2}$



b) $f(0) = -6$

$-6 = a(x-2)(x-3)$ en $x=0$

$\cancel{-6 = a(x^2-3x-2x+6) \rightarrow -6 = a(x^2-5x+6) \text{ en } x=0}$

$-6 = a(-2)\cdot(-3)$

$-6 = 6a$

$\boxed{a=-1}$

c) $y = Kx - 5 \rightarrow K$ es la pendiente, $= f'(x)$

luego $f(x) = -1(x-2)\cdot(x-3) = -(x^2-3x-2x+6) = \boxed{-x^2+5x-6}$

$K = f'(x) = \boxed{-2x+5}$ valor de K, para distintos valores de x

---

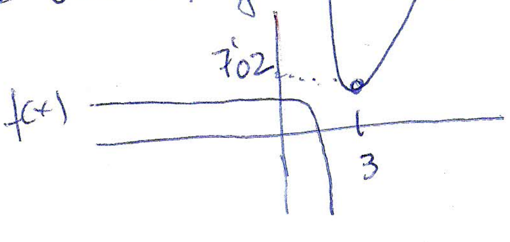
36 a) $x=0 \rightarrow f(0) = \frac{e^0}{5 \cdot 0 - 10} + 3 = \frac{1}{-10} + 3 = \boxed{\frac{29}{10}} = \boxed{2'9}$

b) $\boxed{x=2}$

c) $\cancel{f'(x) = \frac{e^x \cdot (5x-10) - 5 \cdot e^x}{(5x-10)^2} = \frac{5x \cdot e^x - 10 e^x - 5 e^x}{(5x-10)^2} \rightarrow C.G.}$

~~Mínimo en $f'(x)=0$~~

Mejor → Representar f(x) con C.G. y ver coordenadas del mínimo. No liarse con la derivada, que no la pide:



$P(3, 7'02)$

mínimo valor $\boxed{7'02}$

37 a) $q = 2$ | mejor $q = 1$

$h = 0$ | $h = 0$

$K = 3$ | $K = 3 - \ln 2$

se acepta

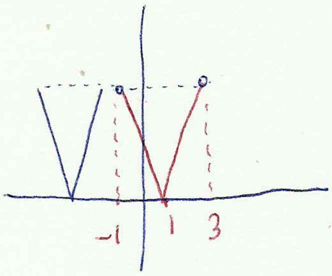
ya que si se reescribe:

$$g(x) = 3 + \ln(x) - \ln(2) = \underline{\ln x + (3 - \ln 2)}$$

---

38 a) Range = [0, 6]

b)



c) Dominio g(x) = [-1, 3]