COMBINATORIA - SOLUCIONES

1. a) Damos un orden (no importa el criterio) a los tres regalos distintos. Ahora **elegimos con orden** tres de las cinco personas para, a la 1ª persona elegida darle el primer regalo, a la 2ª persona elegida darle el segundo regalo y a la 3ª persona elegida darle el tercer regalo. Se trata por lo tanto de un problema de variaciones sin repetición de cinco elementos tomados de tres en tres: $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

   b) Al tratarse de tres regalos iguales, no hace falta numerarlos. Por lo tanto basta con **elegir sin orden** a tres de las cinco personas y darles cualquiera de los tres regalos a cada una. Se trata por lo tanto de un problema de combinaciones sin repetición de cinco elementos tomados de tres en tres: $C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$

2. Elegida cualquiera de sus camisetas (6 posibilidades) la podemos combinar con cualquiera de sus 10 pantalones. Se trata de un **diagrama en árbol** con 6 ramas que se subdividen en 10 ramificaciones. Por lo tanto: $6 \cdot 10 = 60$

3. Como van a ser regalados a la misma persona, no importa el orden con que elijamos la pareja de libros sino de qué libros se trate. Por lo tanto basta con **elegir sin orden** dos de los quince. Se trata por lo tanto de un problema de combinaciones sin repetición de quince elementos tomados de dos en dos: $C_{15,2} = \binom{15}{2} = \frac{15!}{2! \cdot 13!} = 105$

4. a) Tenemos que **ordenar todos** los cinco miembros de la familia. Se trata por lo tanto de un problema de permutaciones sin repetición de cinco elementos: $P_5 = 5! = 120$

   b) Si ponemos al padre en el extremo derecho y a la madre en el extremo izquierdo tenemos que **ordenar todos** los tres hijos. Es un problema de permutaciones sin repetición de tres elementos $P_3 = 3! = 6$. Pero si ponemos al padre en el extremo izquierdo y a la madre en el extremo derecho de nuevo hay otras $P_3 = 3! = 6$ posibilidades. Por lo tanto: $2 \cdot P_3 = 2 \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$

5. Debemos **elegir con orden** cuatro de los seis resultados del dado con la posibilidad de **repetirlos**. Se trata de un **diagrama en árbol** con 6 ramas que se subdividen en otras 6 ramificaciones, a su vez en otras 6 y por último en otras 6. Por lo tanto es un problema de variaciones con repetición de seis elementos tomados de cuatro en cuatro. $VR_{6,4} = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$.

6. a) Debemos **elegir con orden** tres de las cuatro cifras con la posibilidad de **repetirlos**. Se trata de un **diagrama en árbol** con ramas que siempre se subdividen en otras cuatro. Por lo tanto es un problema de variaciones con repetición de cuatro elementos tomados de tres en tres: $VR_{4,3} = 4^3 = 64$

   b) Debemos **elegir con orden** tres de las cuatro cifras sin la posibilidad de repetirlos. Se trata de un **diagrama en árbol** con ramas que se subdividen siempre con una rama menos por lo tanto de un problema de variaciones sin repetición de cuatro elementos tomados de tres en tres: $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

   c) Tenemos que **ordenar todos** los cuatro números. Se trata por lo tanto de un problema de permutaciones sin repetición de cuatro elementos: $P_4 = 4! = 24$

   d) La cifra 2 debe ser la última. De manera que tendremos que **elegir con orden** dos de las tres cifras sin la posibilidad de repetirlos. Por lo tanto es un problema de variaciones sin repetición de tres elementos tomados de dos en dos: $V_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$

7. Se sobreentiende que en fútbol-sala no hay puestos fijos salvo el portero. Por lo tanto no importará el orden con que elijamos a los cuatro jugadores que acompañen al portero. Tendremos entonces que **elegir sin orden** cuatro de los nueve. Se trata por lo tanto de un problema de combinaciones sin repetición de nueve elementos tomados de cuatro en cuatro: $C_{9,4} = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = 126$

8. Debemos **elegir con orden** tres de los 30 corredores para, al 1º darle el primer premio, al 2º para darle el segundo premio y al 3º para darle el tercer premio. Se trata por lo tanto de un problema de variaciones sin repetición de 30 elementos tomados de tres en tres: $V_{30,3} = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24.360$

9. Se sobreentiende que en la salsa no importa el orden en que mezclemos los tres ingredientes. Tendremos entonces que **elegir sin orden** tres de los siete ingredientes. Se trata por lo tanto de un problema de combinaciones sin repetición de siete elementos tomados de tres en tres: $C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$

10. Elegido cualquiera de los alumnos de 1° de ESO (40 posibilidades) podemos continuar con cualquiera de los alumnos de 2° de ESO (35 posibilidades), seguir con cualquiera de los alumnos de 3° de ESO (32 posibilidades) y terminar con cualquiera de los 28 de 4º. Se trata de un **diagrama en árbol** con cuatro fases de ramificación. Por lo tanto: $40 \cdot 35 \cdot 32 \cdot 28 = 1.254.400$

11. Cada saludo implica a dos personas y no tiene sentido darles un cierto orden. Tendremos entonces que calcular de cuántas manera se pueden **elegir sin orden** 2 de las 15 personas. Se trata por lo tanto de un problema de combinaciones sin repetición de dos elementos tomados de 15 en 15: $C_{15,2} = \binom{15}{2} = \frac{15!}{2! \cdot 13!} = 105$

PROBABILIDAD - SOLUCIONES

1. a) Entre las tres cartas elegidas podemos tener de tres a ningún as. El espacio muestral será entonces: $E = \{0, 1, 2, 3\}$

   b) La ley de Laplace debe aplicarse dando la misma probabilidad a cada una de las 40 cartas del mazo y **no** a cada uno de los cuatro elementos del espacio muestral. Es obvio que es mucho más difícil conseguir ases que lo contrario. Concretando, por ejemplo la probabilidad de obtener tres ases sería: $P(3) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{24}{59280}$ mientras que la de no obtener ningún as sería: $P(0) = \frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} \cdot \frac{34}{38} = \frac{42840}{59280}$

2. $A \cup B =$"la bola extraída, o es un número múltiplo de 3 o es un número par"$= \{2,3,4,6\}$
   $A \cap B =$"la bola extraída es un número par múltiplo de 3"$= \{6\}$
   $\overline{A} \cup \overline{B} =$"la bola extraída, o no es un número múltiplo de 3 o no es un número par"$=$
   $=$"la bola extraída no es un número par múltiplo de 3"$= \{1,2,3,4,5\}$
   $\overline{A} \cap B =$"la bola extraída es un número par que no es múltiplo de 3"$= \{2,4\}$

3. a) El mayor de los dos resultados puede ser cualquier nº del 1 al 6. El espacio muestral será: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

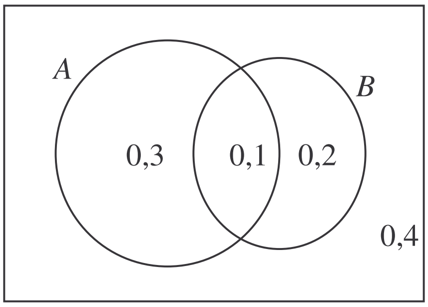
b) Ponemos en cada celda el mayor de los dos resultados:

mayor	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

b) Vemos en la tabla que disponemos de 36 casos. Hay una celda con un 1, tres celdas con un 2 etc. La probabilidad de cada suceso elemental será entonces:

X	1	2	3	4	5	6
P	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$

4. a) Se empieza con la probabilidad de la intersección: 0,1 La región de su izquierda ($A – B$) tendrá de probabilidad: 0,4 – 0,1 = 0,3.
La región de su derecha ($B – A$) tendrá de probabilidad: 0,3 – 0,1 = 0,2.
La unión A∪B tendrá de probabilidad: 0,3 + 0,1 + 0,2 = 0,6.
La región periférica tendrá de probabilidad: 1 – 0,6 = 0,4.



b) Para calcular cada una de las probabilidades siguientes basta con observar el diagrama de Venn y contestar, pero si la probabilidad es condicionada se aplica primero la definición.

$P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}6$

$P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}3} = \dfrac{1}{3}$

$P(A \cup \overline{B}) = 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}8$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B - A) = 0{,}2$

$P(\overline{A}/B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B-A)}{P(B)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}3} = \dfrac{2}{3}$

$P(B/\overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B-A)}{1-P(A)} = \dfrac{0{,}2}{1-0{,}4} = \dfrac{0{,}2}{0{,}6} = \dfrac{1}{3}$

5. Al tratarse de sucesos independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2$.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}7$
El suceso “que ocurra *A* o que ocurra *B* pero no ambos” incluye a su unión ($A \cup B$) pero **no** a su intersección (A∩B).
Por lo tanto:
P(“que ocurra *A* o que ocurra *B* pero no ambos”) = $P(A \cup B) - P(A \cap B)$ = 0,7 – 0,2 = 0,5

6. a) $\overline{N} \cap \overline{D}$ = “Que no sea ni negro ni diesel”

D/N = “Que sea diesel sabiendo que su color es negro”

$\overline{N}/D$ = “Que no sea negro sabiendo que es diesel”

$\overline{N} \cup D$ = “Que sea diesel o que no sea negro”

b) Se comienza rellenando las celdas con los datos conocidos: total = 50, 10 negros, 6 diesel, 2 negros y diesel. Las restantes celdas se calculan restando

	Negro	**No Negro**	
Diesel	2	4	6
No Diesel	8	36	44
	10	40	50

c) $P(D \cup N) = \dfrac{2+4+8}{50} = \dfrac{14}{50} = 0{,}28$

d) $P(\overline{D}/N) = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$

7. a) Ponemos los datos en una tabla de contingencia y los sumamos para hallar los totales:

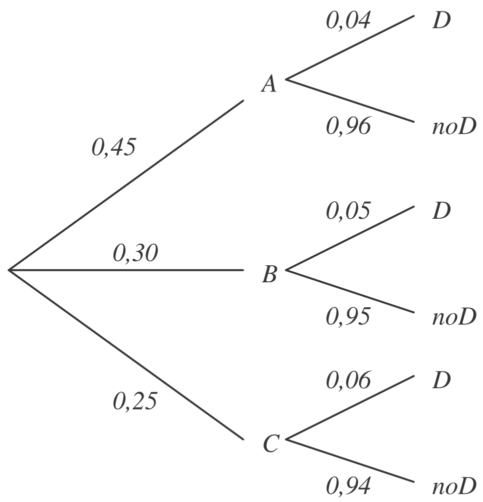
	Eléctrico	Mecánicos	Chapa	
Mañana	3	8	3	14
Tarde	2	3	1	6
	5	11	4	20

b) $P(Tarde) = \dfrac{6}{20} = 30\%$

c) $P(Mecánicos) = \dfrac{11}{20} = 55\%$

d) $P(Mañana / Eléctricos) = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

8. a) Construimos un diagrama en árbol que muestra las probabilidades del enunciado y sus complementarias:



b) $P(D) = 0{,}45 \cdot 0{,}04 + 0{,}30 \cdot 0{,}05 + 0{,}25 \cdot 0{,}06 = 0{,}048$

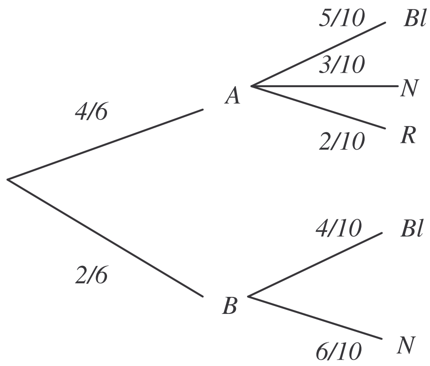
9. a) Sabemos que, permutando los tres colores, hay seis casos posibles: *BNR, BRN, NBR, NRB, RBN* y *RNB*. En cada uno de los seis casos se obtiene el mismo producto de probabilidades, la suma de todas ellas es entonces uno de estos sumandos multiplicado por seis:

$$P(\text{colores distintos}) = 6 \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{15} = \frac{720}{3375} = 0{,}213$$

b) Se hace de la misma manera, pero a tratarse de un problema "*sin reemplazamiento*" los denominadores van disminuyendo a ir extrayendo las bolas:

$$P(\text{colores distintos}) = 6 \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{720}{2730} = 0{,}264$$

10. Construimos un diagrama en árbol que muestra las probabilidades del enunciado y sus complementarias:

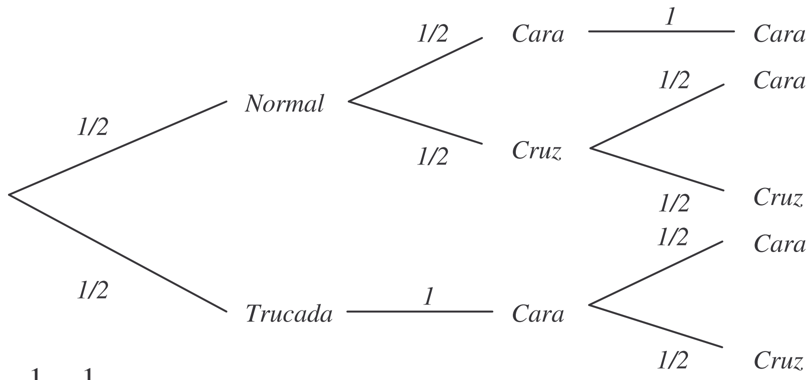


a) $P(Blanca) = \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{5}{10} + \dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{4}{10} = \dfrac{28}{60} = 0{,}467$

b) Se puede calcular con las probabilidades de blanca o negra pero también se puede hacer así:

$$P(No\ Roja) = 1 - P(Roja) = 1 - \left(\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{10}\right) = 1 - \frac{8}{60} = \frac{52}{60} = 0{,}8667$$

11. Iniciamos el diagrama en árbol con la elección de la moneda, a continuación tenemos en cuenta que la moneda trucada no tiene cruz y por último que cuando salga cara se cambia de moneda.



a) $P(2\,\text{Cruces}) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$

b) $P(\text{Cara en la 2ª tirada}) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1 + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{8} = 0{,}625$

12. Simbolizamos con *E1* al suceso "*el alumno es de 1º de ESO*" y con *E2, E3, E4, B1, B2* para los restantes niveles de ESO o Bachillerato. El porcentaje de 2º de Bachillerato es el resto hasta 100%, es decir un 11%.

a) Si llamamos A al suceso "*aprobar*":

$$P(A) = P(E1)\cdot P(A/E1) + P(E2)\cdot P(A/E2) + P(E3)\cdot P(A/E3) + P(E4)\cdot P(A/E4) + P(B1)\cdot P(A/B1) + P(B2)\cdot P(A/B2) =$$
$$= 0{,}20\cdot 0{,}60 + 0{,}20\cdot 0{,}50 + 0{,}18\cdot 0{,}40 + 0{,}16\cdot 0{,}60 + 0{,}15\cdot 0{,}40 + 0{,}11\cdot 0{,}50 = 0{,}503$$

b) $P(A/B1\cup B2) = \dfrac{P\big(A\cap(B1\cup B2)\big)}{P(B1\cup B2)} = \dfrac{P(A\cap B1) + P(A\cap B2)}{P(B1) + P(B2)} = \dfrac{0{,}15\cdot 0{,}40 + 0{,}11\cdot 0{,}50}{0{,}15 + 0{,}11} = 0{,}442$