## Distribuciones de probabilidad

1. a) Se trata de una función de probabilidad porque suman uno: 0'16 + 0'25 + 0'21 + 0'12 + 0'26 = 1

| $X$ | 0 | 3 | 5 | 6 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0'16 | 0'25 | 0'21 | 0'12 | 0'26 |

b) $P[X = par] = P[X = 0] + P[X = 6] + P[X = 10] = 0{,}16 + 0{,}12 + 0{,}26 = 0{,}54$

c) $\mu = \sum p_i \cdot x_i = 0{,}16 \cdot 0 + 0{,}25 \cdot 3 + 0{,}21 \cdot 5 + 0{,}12 \cdot 6 + 0{,}26 \cdot 10 = 5{,}12$

2. Primero calculamos la probabilidad de cada tipo de carta, y la asociamos al premio económico.

| | as | sota, caballo o rey | otra carta |
|---|---|---|---|
| $X$ | +6 | +4 | −3 |
| $p$ | $4/40$ | $12/40$ | $24/40$ |

$\mu = \sum p_i \cdot x_i = \dfrac{4}{40} \cdot 6 + \dfrac{12}{40} \cdot 4 + \dfrac{24}{40} \cdot (-3) = 0$ Se trata de un juego equitativo. Si jugásemos muchas veces, como promedio, ni ganaríamos ni perderíamos dinero. Podríamos jugar como mero entretenimiento.

3. a) Los resultados posibles son los que muestra la siguiente tabla de doble entrada. Al tratarse de un caso de *sin reposición* no existen los casos de repetición de valores:

| ***suma*** | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | | 1 | 2 |
| 1 | 1 | | 3 |
| 2 | 2 | 3 | |

La probabilidad de cada caso es la misma, ya que hay el mismo número de bolas con cada cifra.

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $2/6$ | $2/6$ | $2/6$ |

b) $\mu = \sum p_i \cdot x_i = \dfrac{2}{6} \cdot 1 + \dfrac{2}{6} \cdot 2 + \dfrac{2}{6} \cdot 3 = 2$

$$\sigma = \sqrt{\sum p_i \cdot x_i^2 - \mu^2} = \sqrt{\frac{2}{6} \cdot 1^2 + \frac{2}{6} \cdot 2^2 + \frac{2}{6} \cdot 3^2 - 2^2} = 0{,}816$$

4. Como las preguntas están planteadas en esos términos utilizaremos como variable ***X*** el número de lechones recuperados, Se entiende que el porcentaje del 80% de recuperación es estable y por lo tanto idéntico para cada uno de los 14 lechones. Por lo tanto se trata de una variable aleatoria con distribución binomial: ***B***(14; 0'8).

a) $P[X = 7] = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} = \binom{14}{7} \cdot 0{,}8^7 \cdot 0{,}2^7 = 9{,}213 \cdot 10^{-3}$

b) $P[X = 1] = \binom{14}{1} \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^{13} = 9{,}175 \cdot 10^{-9}$

c) $P[X \geq 12] = \binom{14}{12} \cdot 0{,}8^{12} \cdot 0{,}2^2 + \binom{14}{13} \cdot 0{,}8^{13} \cdot 0{,}2^1 + \binom{14}{14} \cdot 0{,}8^{14} \cdot 0{,}2^0 = 0{,}4481$

d) La media y la desviación típica se puede calcular como en los ejercicios anteriores pero, al tratarse distribución binomial, sabemos que el resultado será:

$\mu = np = 14 \cdot 0{,}8 = 11{,}2$ $\qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{14 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 1{,}497$

5. En este ejercicio las preguntas están planteadas tanto en términos de hombres como de mujeres. Defino, aunque podría hacerse lo contrario, como variable ***X*** al número de mujeres existente entre los 8 fumadores. Se entiende que el porcentaje del 70% de mujeres de entre jóvenes menores de 20 años que fuman es estable y por lo tanto idéntico para cada uno de los 8 fumadores. Por lo tanto se trata de una variable aleatoria con distribución binomial: ***B***(8; 0'7).

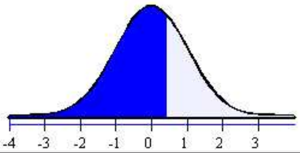
a) $P[X = 8] = \binom{8}{8} \cdot 0{,}7^8 \cdot 0{,}3^0 = 0{,}05765$ $\qquad$ b) $P[X = 0] = \binom{8}{0} \cdot 0{,}7^0 \cdot 0{,}3^8 = 6{,}561 \cdot 10^{-5}$

c) $P[X = 4] = \binom{8}{4} \cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}3^4 = 0{,}1361$

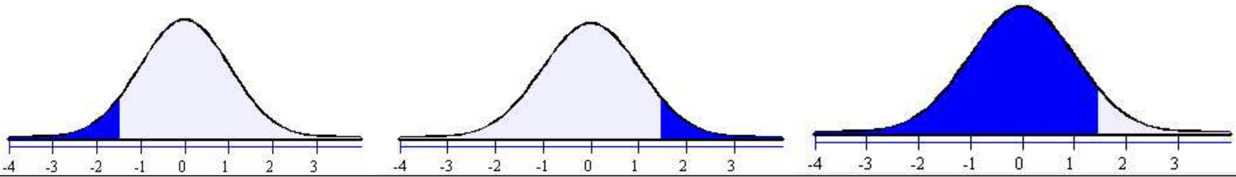
d) $\mu = np = 8 \cdot 0{,}7 = 5{,}6$ $\qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3} = 1.296$

6. Se trata de una búsqueda directa sobre la tabla de la distribución normal N(0,1). Cada probabilidad indicada en los cálculos aparece representada, en el mismo orden, mediante una región sombreada bajo la campana.

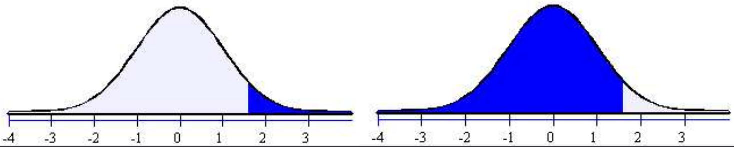
a) $P[Z \leq 0{,}43] = 0{,}6664$



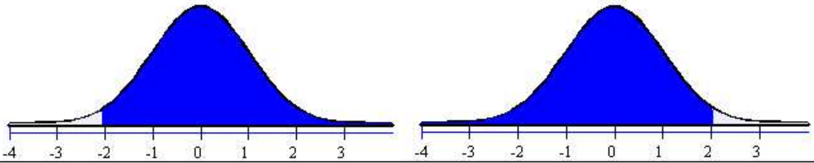
b) $P[Z \leq -1{,}46] = P[Z > +1{,}46] = 1 - P[Z \leq +1{,}46] = 1 - 0{,}9279 = 0{,}0721$



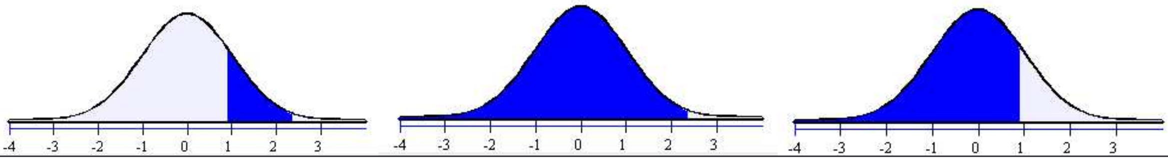
c)
$P[Z > 1{,}61] = 1 - P[Z \leq 1{,}61] =$
$= 1 - 0{,}9463 = 0{,}0537$



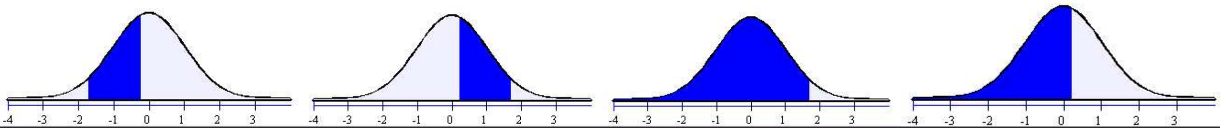
d) $P[Z > -2{,}06] = P[Z \leq +2{,}06] = 0{,}9803$



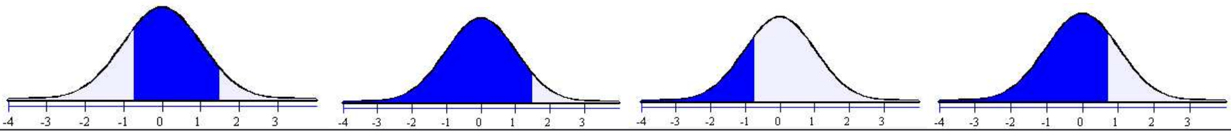
e) $P[0{,}91 < Z \leq 2{,}3] = P[Z \leq 2{,}3] - P[Z \leq 0{,}91] = 0{,}9788 - 0{,}8186 = 0{,}1602$



f) $P[-1{,}72 < Z \leq -0{,}23] = P[0{,}23 < Z \leq 1{,}72] = P[Z \leq 1{,}72] - P[Z \leq 0{,}23] = 0{,}9474 - 0{,}5910 = 0{,}3564$



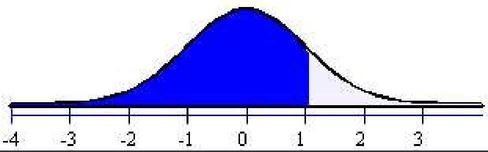
g)
$P[-0{,}74 < Z \leq 1{,}5] = P[Z \leq 1{,}5] - P[Z \leq -0{,}74] = P[Z \leq 1{,}5] - (1 - P[Z \leq +0{,}74]) = 0{,}9332 - (1 - 0{,}7704) = 0{,}7036$



7. Se trata de una búsqueda inversa sobre la tabla de la distribución normal N(0,1). Cada probabilidad indicada en los cálculos aparece representada, en el mismo orden, mediante una región sombreada bajo la campana.

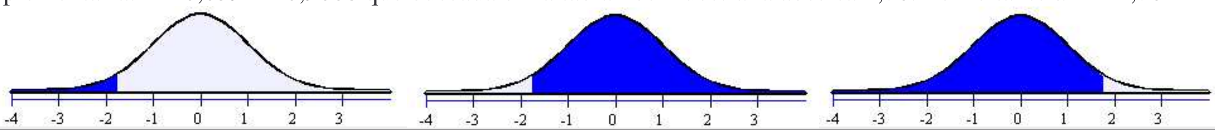
a) $P[Z \leq a] = 0{,}8599 \Rightarrow a = 1{,}08$

Buscamos en la tabla la probabilidad 0,8599, que nos muestra la abscisa 1,08. Por lo tanto $a$ = 1,08



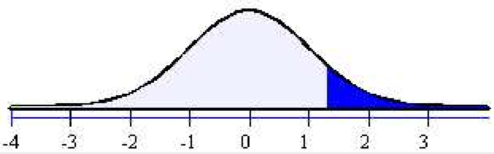
b)
$P[Z \leq a] = 0{,}0392 \Rightarrow P[Z > a] = 1 - 0{,}0392 = 0{,}9608 \Rightarrow P[Z \leq -a] = 0{,}9608 \Rightarrow -a = 1{,}76 \Rightarrow a = -1{,}76$

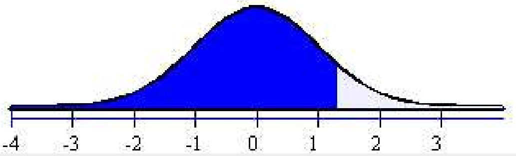
La probabilidad 0,0392 es menor que 0,5 luego $a$ es una cantidad negativa. Pasamos entonces a la probabilidad complementaria: 1 – 0,0392 = 0,9608 que buscada en la tabla nos muestra la abscisa 1,76. Por lo tanto $a$ = – 1,76



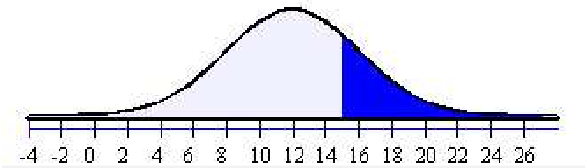
c) $P[Z > a] = 0{,}0951 \Rightarrow P[Z \le a] = 1 - 0{,}0951 = 0{,}9049 \Rightarrow a = 1{,}31$

Como el recinto mira hacia la derecha, pasamos a la probabilidad complementaria: 1 – 0,0951 = 0,9049. Buscando en la tabla nos muestra la abscisa 1,31. Por lo tanto $a$ = 1,31




8. Se trata de una distribución $N(12, 4)$ y nos piden: $P[X > 15]$. La probabilidad pedida es la siguiente región sombreada.




Tipificamos y, como la región mira hacia la derecha, pasamos a la probabilidad complementaria. Hacemos una búsqueda directa en la tabla, encontrando 0,7733, luego la respuesta es 1 – 0,7733 = 0,2267.

$$P[X > 15] = P\left[\frac{X-12}{4} > \frac{15-12}{4}\right] = P[Z > 0{,}75] = 1 - P[Z \le 0{,}75] = 1 - 0{,}7733 = 0{,}2267$$

9. En todos los apartados tenemos que tipificar la normal N(5; 1’5) para poder usar la tabla de la normal $N(0;1)$. Los dos primeros apartados consisten en búsquedas directas mientras que los dos últimos son búsquedas inversas. Si aparecen recintos que miran hacia la derecha o tienen abscisas negativas actuamos como en los ejercicios anteriores.

a)
$$P[X < 6] = P\left[\frac{X-5}{1{,}5} < \frac{6-5}{1{,}5}\right] = P[Z < 0{,}63] = 0{,}7357 = 73{,}57\%$$

b)
$$P[X > 8] = P\left[\frac{X-5}{1{,}5} > \frac{8-5}{1{,}5}\right] = P[Z > 2] = 1 - P[Z \le 2] = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

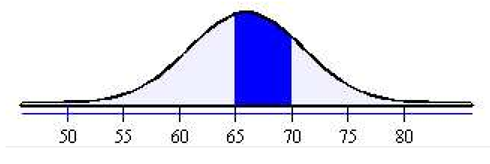
c)
$$P[X > a] = 0{,}75 \Rightarrow P\left[\frac{X-5}{1{,}5} > \frac{a-5}{1{,}5}\right] = 0{,}75 \Rightarrow P\left[Z > \frac{a-5}{1{,}5}\right] = 0{,}75 \Rightarrow P\left[Z \le -\frac{a-5}{1{,}5}\right] = 0{,}75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{a-5}{1{,}5} = 0{,}675 \Rightarrow \frac{a-5}{1{,}5} = -0{,}675 \Rightarrow a = -1{,}5 \cdot 0{,}675 + 5 = 3{,}9875$$

d)
$$P[X \le a] = 0{,}05 \Rightarrow P\left[\frac{X-5}{1{,}5} \le \frac{a-5}{1{,}5}\right] = 0{,}05 \Rightarrow P\left[Z \le \frac{a-5}{1{,}5}\right] = 0{,}05 \Rightarrow P\left[Z > \frac{a-5}{1{,}5}\right] = 0{,}95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left[Z \le -\frac{a-5}{1{,}5}\right] = 0{,}95 \Rightarrow -\frac{a-5}{1{,}5} = 1{,}645 \Rightarrow \frac{a-5}{1{,}5} = -1{,}645 \Rightarrow a = -1{,}5 \cdot 1{,}645 + 5 = 2{,}5325$$

10. Se trata de una distribución $N(66; 5)$ que tipificaremos para poder usar la tabla de la normal $N(0;1)$ y actuaremos como en los ejercicios anteriores. La siguiente región sombreada muestra $P[65 < X \le 70]$ y que obviamente necesita dos búsquedas directas.




$$P[65 < X \le 70] = P\left[\frac{65-66}{5} < \frac{X-66}{5} \le \frac{70-66}{5}\right] = P[-0{,}2 < Z \le 0{,}8] = 0{,}7881 - (1 - 0{,}5793) = 0{,}3674 = 36{,}74\%$$

Por último, sólo quedaría aplicar dicho porcentaje al total de los 800 recién nacidos: $800 \cdot \frac{36{,}74}{100} = 293{,}94$

Aproximadamente, 294 recién nacidos.