SOLUCIONES EJERCICIOS (2, 7, 9, 10, 12, 14, 16 y 20) SERIE 5

2
Oviedo 2019
Junio B

3. Sean los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,-1,-1)$. Calcula:

a) La ecuación del plano $\boldsymbol{\pi}$ que hace que los puntos A y B sean simétricos respecto a él. (1.5 puntos)

b) Los puntos C y D que dividen el segmento AB en tres partes iguales. (1 punto)

---

a) El plano π pasará por le punto medio M del segmento AB

$$M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1,1,1) + \frac{1}{2}(0,-2,-2) \quad \Longrightarrow \quad M(1,0,0)$$

Por otro lado, un vector normal al plano será

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (0,-2,-2)$$

Es decir, una ecuación del plano es

$$-2y - 2z + d = 0$$

Si $M \in \pi \implies d = 0$, la ecuación del plano es

$$\boldsymbol{\pi : y + z = 0}$$

b) Los puntos verifican que

$$C = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad \Longrightarrow \quad C\left(\mathbf{1}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$$

$$D = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad \Longrightarrow \quad D\left(\mathbf{1}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$$

7
Oviedo 2018
Julio A

3. Los puntos $A(0,1,0)$ y $B(-1,1,1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercero C pertenece a la recta $r: \begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$. Además la recta que une A y C es perpendicular a la recta r.

a) Determina el punto C. (1.5 puntos)

b) Calcula el área del triángulo. (1 punto)

---

a) Calculemos la expresión de un punto C de la recta r y un vector director $\vec{v}_r$.

$$r: \begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad (x,y,z) = (4,0,1) + \lambda(0,1,0) \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} C\ (4,\lambda,1) \\ \vec{v}_r = (0,1,0) \end{array}$$

Se tiene que cumplir que $\overrightarrow{AC}$ y $\vec{v}_r$ son perpendiculares

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{v}_r = 0 \quad \Longrightarrow \quad (4, \lambda - 1, 1) \cdot (0,1,0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{C(4,1,1)}$$

b) El área del triángulo es

$$\text{Área triángulo} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|(-1,0,1) \times (4,0,1)| = \frac{1}{2}|(0,5,0)| = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} = \mathbf{2.5}\ \boldsymbol{u^2}$$

SOLUCIONES EJERCICIOS (2, 7, 9, 10, 12, 14, 16 y 20) SERIE 5

9 Oviedo 2018 Modelo A	**3.** Se considera la recta $r: \begin{cases} 2x-y-5=0 \\ x+z-2=0 \end{cases}$ a) **(1,25 puntos)** Halla la ecuación del plano π que contiene a r y pasa por el origen de coordenadas. b) **(1,25 puntos)** Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el punto $(1,0,1)$. **Solución:** a) Pasamos la recta r a paramétricas para obtener fácilmente un punto de r y el vector director. $$r: \begin{cases} x=t \\ y=-5+2t \\ z=2-t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{v}_r(1,2,-1) \\ P_r(0,-5,2) \end{cases}$$ El plano π pasa por el origen y es paralelo a los vectores $\vec{v}_r(1,2,-1)$ y $\overrightarrow{OP_r}(0,-5,2)$. Su ecuación es: $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi: x+2y+5z=0$$ b) Como la recta y el plano son perpendiculares, el vector director de la recta pedida es el vector perpendicular al plano $\vec{v}(1,2,5)$. Por tanto, la ecuación continua de la recta pedida es: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{5}$. (Puede darse la ecuación en otra forma).
10 Oviedo 2018 Modelo B	**3.** a) **(1,25 puntos)** Estudia la posición relativa de la recta $r: \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}$ y el plano π : $2x+4y-3z=15$. b) **(1,25 puntos)** En caso de cortarse, determina la intersección. **Solución:** a) El vector director de la recta es $\vec{v}_r(1,2,3)$ y el perpendicular al plano es $n(2,\vec{4},-3)$. Su producto escalar es $$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (1,2,3)\cdot(2,4,-3) = 1 \neq 0$$ por lo que no son perpendiculares. Entonces la recta y el plano se cortan en un punto. b) Escribimos la recta como $$r: \begin{cases} x=-1+t \\ y=1+2t \\ z=2+3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$ Imponemos que un punto de la recta pertenezca al plano: $$2(-1+t)+4(1+2t)-3(2+3t)=16 \Rightarrow -2+2t+4+8t-6-9t=15 \Rightarrow t=19$$ El punto de corte es $P(18,39,59)$.

SOLUCIONES EJERCICIOS (2, 7, 9, 10, 12, 14, 16 y 20) SERIE 5

12 Oviedo 2017 Junio A	**3.** Dados los puntos $A(1,2,0)$, $B(-1,1,1)$, $C(0,0,1)$, $D(4,1,3)$. Determina: **a)** Si los cuatro puntos son coplanarios. (0.75 puntos) **b)** La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene los puntos A,B,C. (1 punto) **c)** El punto de corte de la recta r con el plano π. (0.75 puntos) --- **a)** Los puntos serán coplanarios si los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ son linealmente dependientes, que se puede comprobar a través del determinante $$\begin{vmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AD} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 11$$ es decir, los vectores son linealmente independientes, luego **no son coplanarios**. **b)** El plano π que contiene los puntos A,B,C está determinado por un punto A y los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. $$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \boldsymbol{x+y+3z-3=0}$$ La recta r tendrá como uno de sus vectores directores al vector normal al plano π, $\vec{v}_r = (1,1,3)$. Y su ecuación vectorial será $$r \; : \; (x,y,z) = (4,1,3) + \lambda(1,1,3) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$ O, en las otras formas $$r \; : \left\{ \begin{array}{l} x = 4+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 3+3\lambda \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x-y=3 \\ 3x-z=9 \end{array} \right. \iff x-4 = y-1 = \frac{z-3}{3}$$ **c)** El punto de corte se puede calcular resolviendo el sistema formado por el plano y la recta $$\left\{ \begin{array}{r} x-y=3 \\ 3x-z=9 \\ x+y+3z=3 \end{array} \right. \overset{\substack{F_2=F_2-3F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{r} x-y=3 \\ 3y-z=0 \\ 2y+3z=0 \end{array} \right. \overset{F_3=3F_3-2F_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{r} x-y=3 \\ 3y-z=0 \\ 11z=0 \end{array} \right.$$ con solución $$\boldsymbol{C(3,0,0)}$$
14 Oviedo 2017 Julio B	**3.** Dada la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x-y+2z=1 \\ 2x+y-5z=2 \end{array} \right.$ y el plano $\pi \; : \; \boldsymbol{a}x - y + z + 1 = 0$ **a)** Halla el valor de $\boldsymbol{a}$ para que sean paralelos. (1.5 puntos) **b)** Para $\boldsymbol{a}=2$, calcula la ecuación del plano $\boldsymbol{\pi'}$ que contiene a r y es perpendicular a π. (1 punto) --- **a)** Calculamos un vector director de la recta $$r : \left\{ \begin{array}{l} x-y+2z=1 \\ 2x+y-5z=2 \end{array} \right. \overset{\substack{Ec_1+Ec_2 \\ Ec_2-2Ec_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} 3x-3z=3 \\ 3y-9z=0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x=1+z \\ y=3z \end{array} \right. \iff$$ $$\iff \quad (x,y,z) = (1,0,0) + \lambda(1,3,1) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Luego

$$\vec{v}_r = (1,3,1)$$

El vector normal al plano es:

$$\pi \ : \ ax - y + z + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{n} = (a,-1,1)$$

Para que la recta y el plano sean paralelos, el vector director de la recta y el vector normal al plano tienen que ser perpendiculares.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (1,3,1)\cdot(a,-1,1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a = 2}$$

b) El plano π' estará definido por un punto de la recta $P(1,0,0)$ y los vectores $\vec{v}_r = (1,3,1)$ y $\vec{n} = (2,-1,1)$

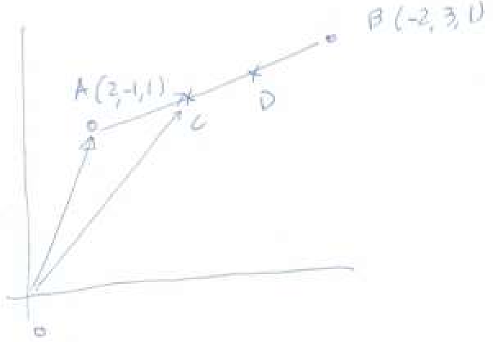
$$\pi' \ : \ \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{4x + y - 7z - 4 = 0}$$

SOLUCIONES EJERCICIOS (2, 7, 9, 10, 12, 14, 16 y 20) SERIE 5

16
Oviedo 2017
Modelo B

(16) Oviedo 2017 Modelo B

a)



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

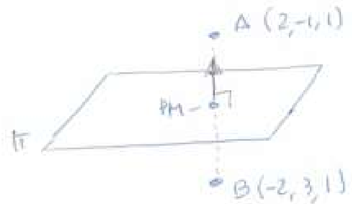
$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

Luego: $\boxed{C = \left(2/3,\ 1/3,\ 4/3\right)}$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 5/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

Luego $\boxed{D = \left(-2/3,\ 5/3,\ 5/3\right)}$

b)



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \simeq \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$PM = \left(\frac{2+(-2)}{2},\ \frac{(-1)+3}{2},\ \frac{1+1}{2}\right) = (0, 1, 1) \Rightarrow \boxed{(0, 1, 1)}$$

π → Vector ⊥ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ → Punto $(0, 1, 1)$ $\Rightarrow$ $\pi \equiv x - y + D = 0$

$PM \in \pi \Rightarrow 0 - 1 + D = 0$

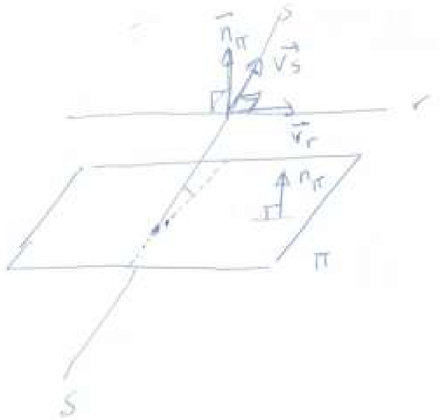
$\boxed{D = 1}$

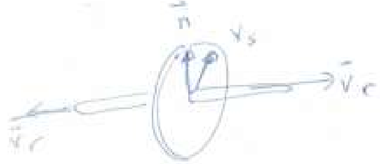
Luego el plano π es: $\boxed{x - y + 1 = 0}$

SOLUCIONES EJERCICIOS (2, 7, 9, 10, 12, 14, 16 y 20) SERIE 5

<table>
<tr>
<td>20
Oviedo 2016
Fase específica
Junio B</td>
<td>

20 Oviedo 2016 Fase específica
Junio B





$$\vec{n}_\pi \times \vec{v}_s \approx \vec{v}_r$$

$$\vec{v}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n}_\pi = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}_s \times \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 9\vec{k} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_r = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$r \equiv \boxed{\frac{x-2}{-1} = y+1 = \frac{z+1}{3}}$$

</td>
</tr>
</table>