TEMA 8: REPRESENTACIÓN de FUNCIONES

PASOS a SEGUIR

① Dominio

② Puntos de discontinuidad. (En las funciones racionales, los puntos que anulan el denominador. En las funciones a trozos, en los "puntos de unión"....)

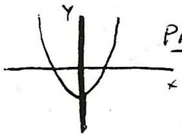
En general $f(x)$ tiene una discontinuidad en $x=a$ si:

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a) \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

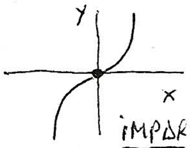
③ Simetrías

ⓐ Función Par $\Rightarrow f(x) = f(-x)$

ⓑ Función Impar $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$



PAR



IMPAR

④ Puntos de corte con los dos ejes de coordenadas

⑤ Asíntotas

ⓐ Verticales: se buscan los valores "a" tales que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ \infty \end{cases}$$

(es útil para el dibujo hallar los límites laterales en $x=a$

Asíntota $\Rightarrow \boxed{x=a}$

NOTA: Buscar en puntos que anulen denominador...

ⓑ Horizontales: Se busca

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = K \quad y \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = K$$

. Si el límite es ∞ no hay asíntota.

Asíntota $\Rightarrow \boxed{y=K}$

ⓒ Oblicuas: Se busca $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ (si es ∞ no hay asíntota

y después $n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - m\cdot x)$

también le busca para $-\infty$

Asíntota, si m y n son finitos será $\boxed{y = mx + n}$

⑥ Monotonía:

- puntos críticos o extremos $f'(x) = 0$
- crecimiento $f'(x) > 0$ creciente; $f'(x) < 0$ decreciente

⑦ Curvatura:

- convexa $f''(x) = +$
- cóncava $f''(x) = -$
- Puntos de inflexión $f''(a) = 0$, está definida en $x=a$ y además en este punto cambia de curvatura.

8

Ejemplo: Representar la función $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

① Dominio: todos los $\mathbb{R} - \{1, -1\}$

② Puntos de discontinuidad: $x = 1$ y $x = -1$, (se anula el denominador), $x^2 - 1 = 0$ ....

③ Simetrías:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} = f(x).$$ Función PAR. Simétrica respecto **OY**.

④ Puntos de corte:

para $x = 0 \Rightarrow y = -1$; $\boxed{P(0,-1)}$

para $y = 0 \Rightarrow x$: No tiene solución. No corta el eje OY

⑤ Asíntotas:

Verticales

* $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{2}{0} = \infty$; luego $\boxed{x=1}$ es asínt. vert.

* $\lim_{x \to -1} f(x) = \frac{2}{0} = \infty$; luego $\boxed{x=-1}$ es asint. vert.

Horizontales

* $\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = \text{ind.}$; luego $\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}} = 1$

* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ldots\ldots = 1$ luego $\boxed{y = 1}$ es asint hort.

Oblicuas: Si tiene asíntotas Horizontales, no tiene oblicuas, y viceversa.

⑥ Monotonía

$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$; $\frac{-4x}{(x^2-1)^2} = 0$; $-4x = 0$; $\boxed{x = 0}$. En $x=0$ hay un punto crítico, máximo o mínimo

$f'(x) = +$ | $f'(x) = -$

creciente 0 decreciente $\rightarrow$ $\boxed{x=0;\ \text{máximo}}$

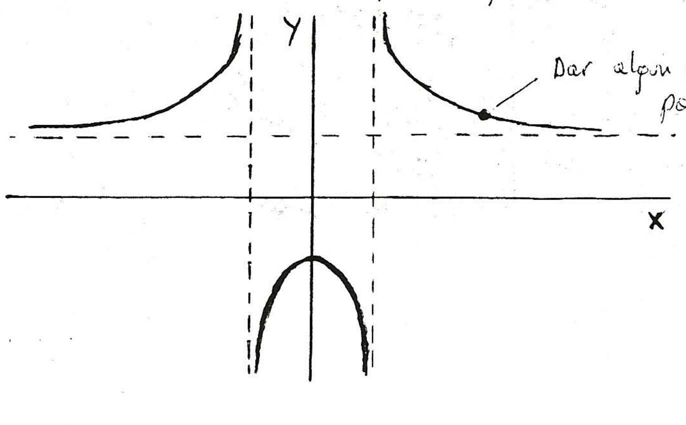
⑦ Curvatura:

$f''(x) = \frac{12x^4 - 8x^2 - 4}{(x^2-1)^2}$; $f''(x) = 0$; $12x^4 - 8x^2 - 4 = 0$;

$x^2 = t \Rightarrow 12t^2 - 8t - 4 = 0$. ...... ; $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = \sqrt{\frac{-1}{3}}$; $x_4 = -\sqrt{\frac{-1}{3}}$

Ninguna solución es posible, x_1 y x_2 por no estar definida, y x_3 y x_4 por ser raíz de nº negativo, luego no tiene puntos de inflexión.

Dar entonces algún valor a la derivada segunda, para ver curvatura Ej. $\begin{cases} f''(0) = - \\ f''(10) = + \end{cases}$



Dar algún valor a $f(x)$ para ver si está por encima o debajo de la asíntota