Sistemas de ecuaciones lineales

1. Concepto, clasificación y notación

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas se puede escribir del siguiente modo:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

donde:

- a_{ij} son números reales conocidos, llamados *coeficientes* del sistema.
- b_1, b_2, $\dots b_m$ son números reales conocidos, llamados *términos independientes*.
- x_1, x_2, $\dots x_n$ son números reales desconocidos, llamados *incógnitas* del sistema.

Si todos los términos independientes son nulos, el sistema se llama *homogéneo*:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Observemos que en un sistema de ecuaciones lineales:

- el número de ecuaciones no tiene por qué coincidir con el número de incógnitas.
- las incógnitas son siempre de primer grado.
- si el número de incógnitas es pequeño se las suele representar por: x, y, z, t, $\dots$

Ejemplos

$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & - & 4z & = & 1 \\ x & - & 2y & - & 5z & = & 2 \end{array}\right.$ sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas

$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & - & 4z & = & 0 \\ x & - & 2y & - & 5z & = & 0 \end{array}\right.$ sistema homogéneo (asociado al anterior)

Una solución de un sistema es un conjunto de números reales s_1, s_2, $\dots s_n$ tales que al sustituir x_1 por s_1, x_2 por s_2, etc, se satisfacen a la vez las m ecuaciones. Resolver un sistema es hallar **todas** sus soluciones.

Los sistemas que tienen al menos una solución se llaman *compatibles*:

- si la solución es única, el sistema es *compatible determinado*.
- si tiene más de una solución, el sistema es *compatible indeterminado*. Más adelante veremos que si un sistema tiene más de una solución, entonces tiene infinitas soluciones.

Los sistemas que no tienen ninguna solución se llaman *incompatibles*.

A un sistema de m ecuaciones con n incógnitas se le pueden asociar las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Las matrices A y A^* se denominan *matriz de los coeficientes* y *matriz ampliada* del sistema, respectivamente.

Si llamamos X a la matriz columna de incógnitas:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

y B a la matriz columna de los términos independientes:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

entonces, el sistema se puede escribir así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

es decir: $A \cdot X = B$ por tanto, como una sencilla ecuación matricial.

2. Sistemas equivalentes

Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

Si dos sistemas de ecuaciones son equivalentes, entonces tienen el mismo número de incógnitas, aunque no es necesario que tengan el mismo número de ecuaciones.

Es evidente que si se cambia el orden de las ecuaciones, el sistema resultante no sólo es equivalente al inicial, sino que en realidad es el mismo.

2.1. Criterios de equivalencia

- Si se multiplican los dos miembros de una ecuación por un número distinto de cero, se obtiene un sistema equivalente al primero.
- Si a una ecuación se le suma otra del sistema, se obtiene un sistema equivalente.

- Si en un sistema se suprime una ecuación que sea combinación lineal de otras, se obtiene un sistema equivalente.
  Por ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 4 \\ x & - & y & = & -1 \\ 3x & - & 2y & = & 3 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 4 \\ x & - & y & = & -1 \end{array}\right.$$

  ya que $E_3 = E_2 + E_1$ (la tercera ecuación es redundante, al ser combinación lineal de otras del sistema).

3. Resolución por el método de Gauss

Consiste en aplicar ordenadamente los criterios de equivalencia anteriores para obtener un sistema equivalente al inicial, que sea escalonado, es decir, tal que cada ecuación tenga una incógnita menos que la ecuación anterior. Para simplificar la notación se suele utilizar la matriz ampliada del sistema.

Es imprescindible que todas las incógnitas ocupen el mismo lugar en las ecuaciones, por lo que puede ser adecuado escribir el símbolo de la incógnita encima de la columna correspondiente.

Estudiaremos este método con ejemplos.

3.1. Ejemplo 1

Resolver el sistema: $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & - & y & - & 2z & = & -2 \\ -x & + & 2y & + & z & = & -2 \end{array}\right.$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -6 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{7F_3+5F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \end{array}\right)$$

Volvemos a escribir el sistema con la notación estándar:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ & & -7y & - & 6z & = & -4 \\ & & & & -9z & = & -27 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} z = 3 \\ y = \dfrac{-4+6z}{-7} = -2 \\ x = 1 - 3y - 2z = 1 \end{array}\right.$$

Solución: $(1,\ -2,\ 3)$

El sistema tiene una única solución. Por tanto, es compatible determinado.

En general, si en el sistema escalonado, el número de ecuaciones no nulas es igual al número de incógnitas, el sistema es compatible determinado (SCD).

3.2. Ejemplo 2

Resolver el sistema: $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 5z & = & 4 \\ -2x & + & y & & & = & -3 \\ 3x & - & 2y & + & z & = & 4 \end{array}\right.$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -5 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2+2F_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & 5 \\ 0 & -8 & 16 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{5}F_2]{\frac{1}{8}F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La tercera ecuación del sistema se ha convertido en ceros: $0 = 0$. Dicha ecuación es redundante, y podemos prescindir de ella. Esto ocurre porque la tercera ecuación es combinación lineal de las otras dos. Nos queda es sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 4 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$$

Como hay dos ecuaciones y tres incógnitas, damos a una de las incógnitas (z, por ejemplo) un valor paramétrico $\lambda \in I\!R$:

$$\begin{aligned} &z = \lambda, \quad \lambda \in I\!R \\ &y = 1 + 2z \ \Rightarrow\ y = 1 + 2\lambda \\ &x = 4 - 2y + 5z = 4 - 2(1 + 2\lambda) + 5\lambda = 2 + \lambda \end{aligned}$$

Solución: $(2 + \lambda,\ 1 + 2\lambda,\ \lambda)$

El sistema tiene infinitas soluciones, ya que para cada valor que demos a λ, se obtiene una solución distinta. Por tanto, es compatible indeterminado.

$$(2 + \lambda,\ 1 + 2\lambda,\ \lambda) \ \Rightarrow \ \text{solución general}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda = 0: & (2,\ 1,\ 0) \\ \lambda = 1: & (3,\ 3,\ 1) \\ \lambda = -2: & (0,\ -3,\ -2) \\ \text{etc} & \end{array}\right\} \Rightarrow \text{soluciones particulares}$$

En general, si en el sistema escalonado el número de ecuaciones no nulas es menor que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado (SCI). Al número de parámetros que se requieren para llegar a la solución se le llama grado de indeterminación del sistema:

g.i.=n° incógnitas−n° ecuaciones no nulas

3.3. Ejemplo 3

Resolver el sistema: $\begin{cases} x + 5y - z = 5 \\ 2x + 3y - 4z = 1 \\ x - 2y - 3z = 2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & -2 & -9 \\ 0 & -7 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

La tercera ecuación es un absurdo ($0 = 6$), no se satisface para ningún valor real; el sistema no tiene solución, por tanto es incompatible.

En general, siempre que al escalonar la matriz se obtenga una ecuación de la forma $0 = b,\ b \neq 0$ el sistema es incompatible (SI).

3.4. Ejemplo 4

Resolver el sistema: $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + 2y + t = 0 \\ 2x + z - t = 0 \end{cases}$

Cuando el sistema es homogéneo no es necesario poner la columna de los términos independientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Nos queda:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & & = 0 \\ & & 3y & - & z & + t & = 0 \\ & & & & 7z & - t & = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z = \lambda, \;\; \lambda \in \mathbb{R} \\ t = 7z \;\Rightarrow\; t = 7\lambda \\ y = \dfrac{z-t}{3} \;\Rightarrow\; y = \dfrac{\lambda - 7\lambda}{3} \;\Rightarrow\; y = -2\lambda \\ x = -y + z = 2\lambda + \lambda = 3\lambda \end{array}\right.$$

El sistema es compatible indeterminado. Solución general: $(3\lambda,\ -2\lambda,\ \lambda,\ 7\lambda)$
Para $\lambda = 0$: $(0,0,0,0) \Rightarrow$ *solución trivial.*

Todos los sistemas homogéneos son compatibles, pues todos tienen al menos la solución trivial (formada exclusivamente por ceros). Un sistema homogéneo compatible determinado **sólo** tiene la solución trivial, mientras que un sistema homogéneo compatible indeterminado tiene infinitas soluciones (entre ellas la trivial).

4. Resolución por el método de la matriz inversa

Vimos en el apartado 1 que un sistema de ecuaciones lineales puede representarse como una ecuación matricial $AX = B$, donde A es la matriz de los coeficientes, X es la matriz columna de incógnitas y B es la matriz columna de términos independientes.

El método de resolución de sistemas por la matriz inversa sólo puede aplicarse en el caso de que la matriz A tenga inversa, es decir:

- A es una matriz cuadrada (el sistema tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas).
- $|A| \neq 0$ (todas las ecuaciones son linealmente independientes).

En este caso: $AX = B \;\Rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B$, y el sistema es siempre SCD.

Ejemplo

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & 7 \\ x & & & + & z & = & 4 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (AX = B)$$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, podemos resolver el sistema como una ecuación matricial: $X = A^{-1} \cdot B$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \\ -2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \\ -2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución del sistema es: $(2,\ 1,\ 2)$

5. Teorema de Rouché-Fröbenius

Recordemos que el rango de una matriz es el número de filas linealmente independientes, es decir, que no se anulan al escalonar la matriz. El teorema de Rouché-Fröbenius nos permite estudiar la compatibilidad de un sistema, en función de los rangos de las matrices asociadas al mismo:

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada con la columna de los términos independientes, y recíprocamente:

$$\text{Sistema compatible} \Leftrightarrow \text{rango } A = \text{rango } A^*$$

Si el sistema es compatible, el rango de la matriz indica el número de ecuaciones independientes. Además:

- si el número de incógnitas es igual al rango, el sistema es compatible determinado.
- si el número de incógnitas es mayor que el rango, el sistema es compatible indeterminado.

En resumen:

- rango $A =$rango $A^* = n \ \Rightarrow$ SCD
- rango $A =$rango $A^* < n \ \Rightarrow$ SCI
- rango $A \neq$rango $A^* \ \Rightarrow$ SI

Ejemplos

1. Discutir y resolver, si es posible, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$$

Aplicamos el método de Gauss, con lo cual hallamos rangos y resolvemos simultáneamente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

Observamos que: rango $A = 3 =$rango $A^* =$nº incógnitas $\Rightarrow$ SCD

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y - z = 0 \\ -4z = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z = \dfrac{1}{4} \\ y = z = \dfrac{1}{4} \\ x = 1 - y - 2z = 1 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Solución: $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

---

2. Discutir y resolver, si es posible, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

rango $A = 2$, pero rango $A^* = 3 \ \Rightarrow$ SI

3. Discutir y resolver, si es posible, el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & + & 3y & + & 3z & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

rango A =rango $A^* = 2 <$ nº incógnitas$= 3 \;\Rightarrow\;$ SCI, g.i.$= 1$

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ -3y = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} z = \lambda \\ y = 0 \\ x = 1 - 2y - z = 1 - \lambda \end{array}\right.$$

Solución: $(1-\lambda,\ 0,\ \lambda)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

6. Discusión de sistemas con parámetros

En algunos sistemas se sustituyen algunos de los coeficientes o términos independientes por letras, llamadas también *parámetros*, que pueden tomar como valor cualquier número real. Se trata ahora de estudiar, según los valores de este parámetro si el sistema correspondiente es compatible o no.

Ejemplos

1. Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & az & = & 2 \\ x & - & y & - & z & = & a-1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad A^* = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ 1 & -1 & -1 & a-1 \end{array}\right)$$

El rango de ambas matrices, A y A^* será como máximo 3. Dicho rango será igual a 3 cuando $|A| \neq 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 - a^2 + 1 - a + 2a = -a^2 + a + 2$$

$$|A| = 0 \;\Rightarrow\; -a^2 + a + 2 = 0 \;\Rightarrow\; a^2 - a - 2 = 0 \;\Rightarrow\; a = \left\{\begin{array}{r} -1 \\ 2 \end{array}\right.$$

Casos:

1) $a \neq -1$ y $a \neq 2 \;\Rightarrow\; |A| \neq 0 \;\Rightarrow\;$ rango $A =$ rango $A^* = 3 = n \;\Rightarrow\;$ SCD

2) $a = -1 \;\Rightarrow\; |A| = 0$

$$A^* = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{rango } A = 2 \\ \text{rango } A^* = 3 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \text{SI}$$

3) $a = 2 \Rightarrow |A| = 0$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rango } A = \text{rango } A^* = 2 < 3 = n \Rightarrow \text{SCI}$$

---

2. Discutir y resolver, según los valores de a, el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & az & = & 0 \\ x & & & - & z & = & 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2a + 3 + 4 = 6 + 2a = 0 \Rightarrow a = -3$$

Casos:

1) $a \neq -3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ rango $A =$ rango $A^* = 3 = n \Rightarrow$ SCD
Como el sistema es homogéneo la única solución que tiene es la trivial:
$x = y = z = 0$.

2) $a = -3 \Rightarrow |A| = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}F_3]{\frac{1}{3}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-2F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } A = 2 = \text{rango } A^* < 3 = n \Rightarrow \text{SCI}$$

El sistema queda:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} z = \lambda \\ y = z \Rightarrow y = \lambda \\ x = -2y + 3z \Rightarrow x = -2\lambda + 3\lambda = \lambda \end{array}$$

Solución: $(\lambda,\ \lambda,\ \lambda)$, $\quad \lambda \in \mathbb{R}$