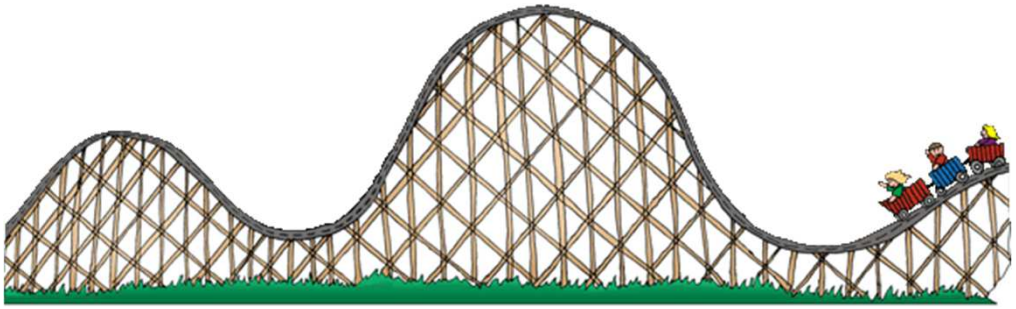
UNIDAD 11

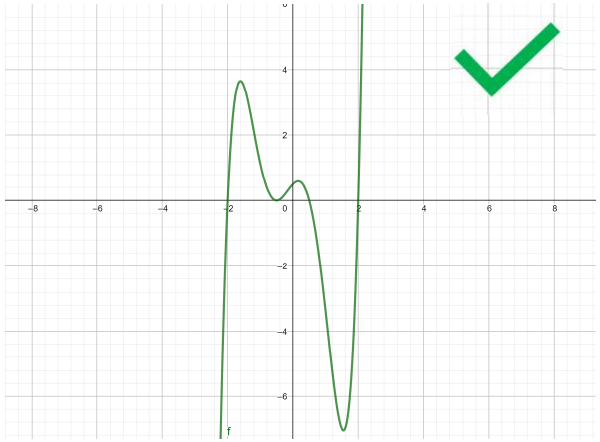
Funciones y gráficas



¿QUÉ VAMOS A APRENDER?

1. Definición de función
2. Dominio y recorrido
3. Continuidad
4. Puntos de corte
5. Monotonía
6. Simetría
7. Periodicidad
8. Funciones a trozos
9. Tasa de Variación Media (TVM)

1. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN



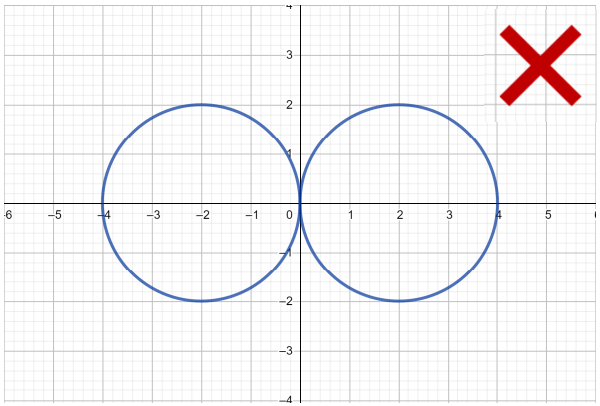
$2x^2+y^2+2x+2y=1$

Fecha de nacimiento	Altura con 16 años
15/08/1928	153 cm
5/07/1970	165 cm
27/03/2003	157 cm
2/10/2003	167 cm

Kg patatas	Precio compra
1	0,90 €
1,5	1,35 €
10	9 €

"Una tienda online hace envíos a toda España. El envío es gratuito para pedidos superiores a 30€, si no, tiene un coste adicional de 3,95€"

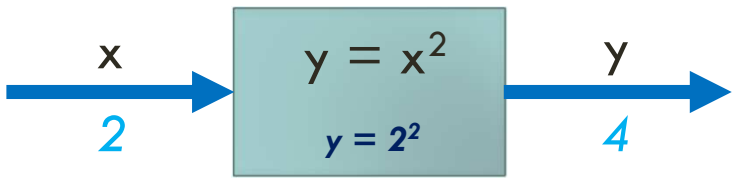
$x^2-y+2x=0$

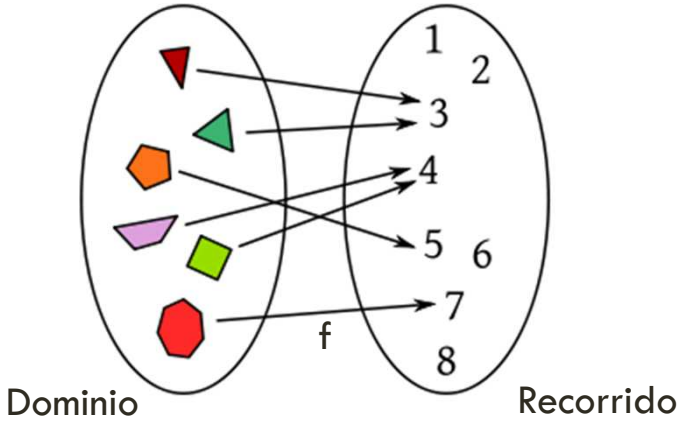


1. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Una función es una relación entre dos magnitudes, tales que a cada valor de la <u>variable independiente (x)</u> le corresponde **un solo** valor de la <u>variable dependiente (y)</u>.

Para indicar que la variable *y* depende de *x* se usa la notación $y = f(x)$, que se lee "y es función de x".





1. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

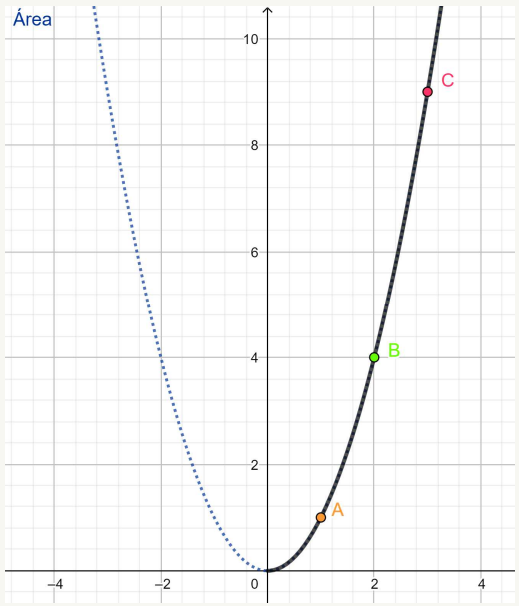
Expresiones de una función:

- Enunciado
- Expresión algebraica
- Tabla de valores
- Gráfica

Relación entre el lado de un cuadrado y su área:

- *El área es igual al lado elevado al cuadrado*
- $A = l^2$

Lado (cm)	Área (cm^2)
1	1
2	4
3	9



1. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN: EJERCICIOS

1. Dibujar la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

   (Da a x los valores -4, -1, 0, 1, 4)

2. En una librería han puesto la siguiente tabla con el precio de las fotocopias:

Nº de copias	0	1	2	3	4	5	6	7
Precio (€)	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,2	0,24	0,28

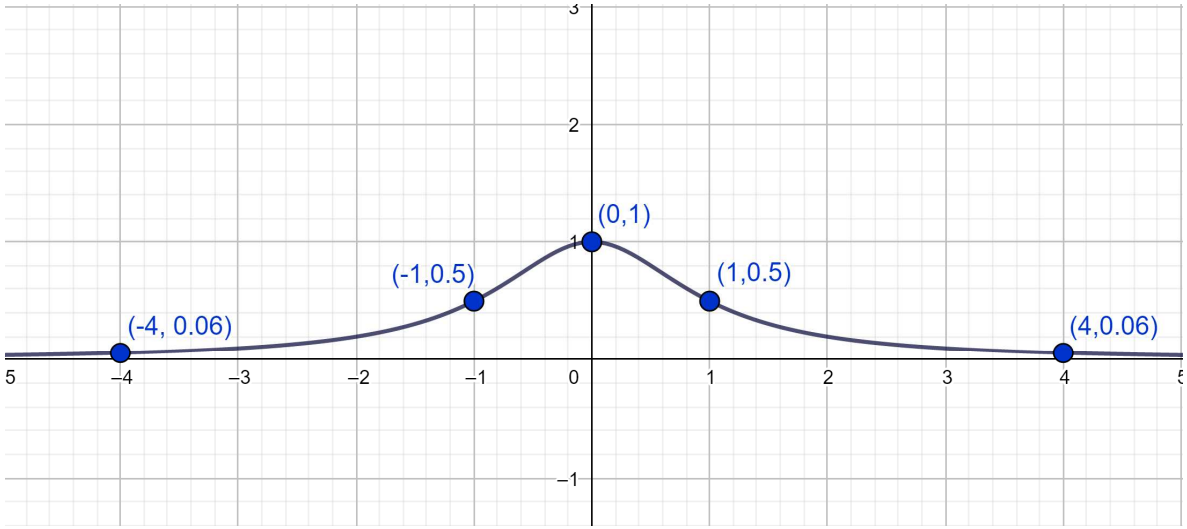
   Representa gráficamente esta función

1. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN: EJERCICIOS

1. Dibujar la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

   (Da a x los valores -4, -1, 0, 1, 4)

x	y
-4	0,06
-1	0,5
0	1
1	0,5
4	0,06

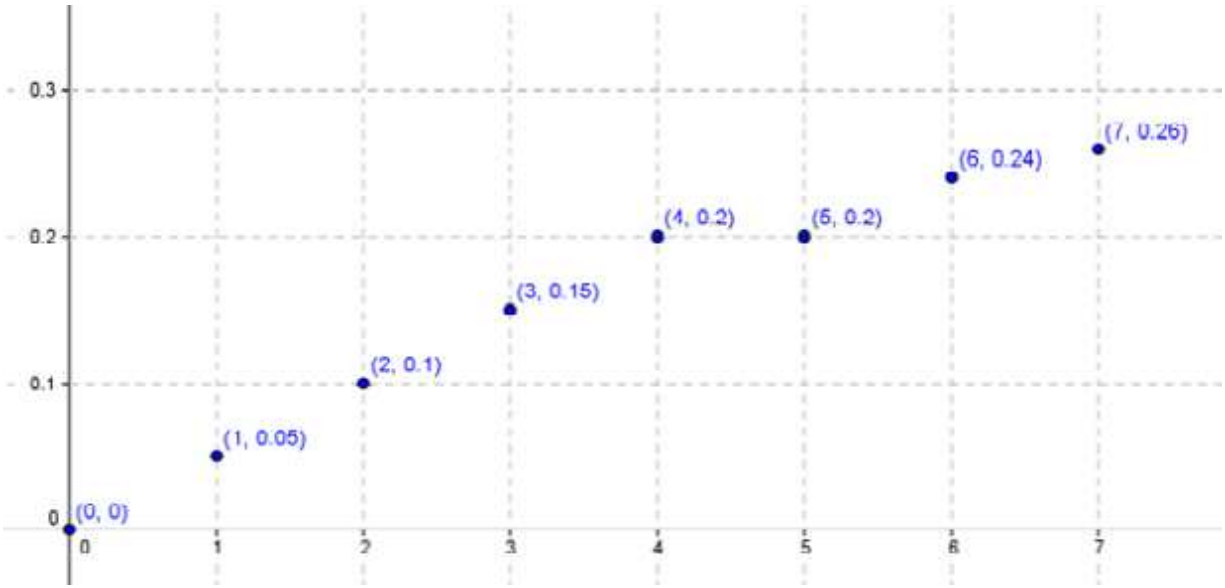


1. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN: EJERCICIOS

2. En una librería han puesto la siguiente tabla con el precio de las fotocopias:

Nº de copias	0	1	2	3	4	5	6	7
Precio (€)	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,2	0,24	0,28

Representa gráficamente esta función



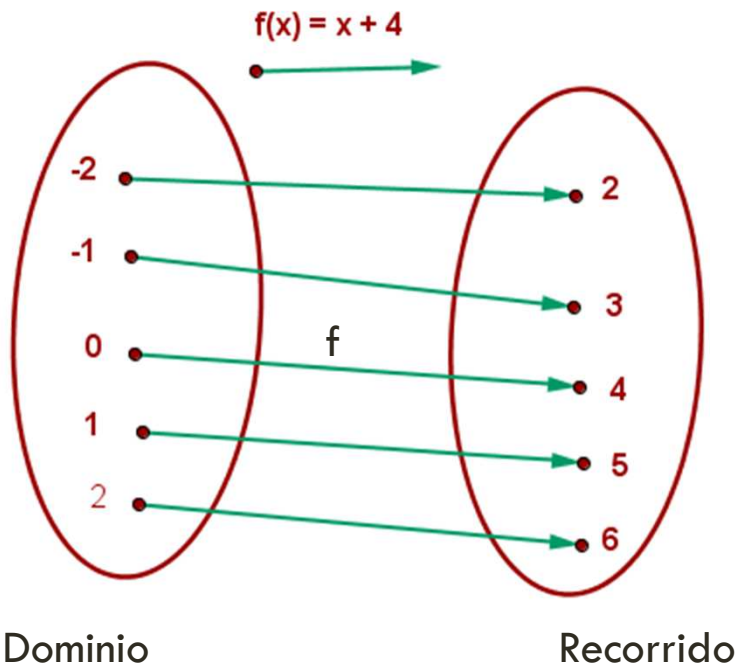
2. DOMINIO Y RECORRIDO

Dominio

Conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente (x). Se escribe ***Dom f***

Recorrido

Conjunto de todos los valores que puede tomar la variable dependiente (y). Se escribe ***Im f***



2. DOMINIO Y RECORRIDO

¿Cómo se calcula el dominio?

- Las <u>funciones polinómicas</u> están definidas en todos los números reales (si no hay restricciones de otro tipo)

  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 3$ Dom f = **R**

- Las <u>funciones racionales</u> ("con x en el denominador") **no** están definidas cuando el denominador se anula.

  $f(x) = \frac{5}{x-3}$ Dom f = **R** – {3}

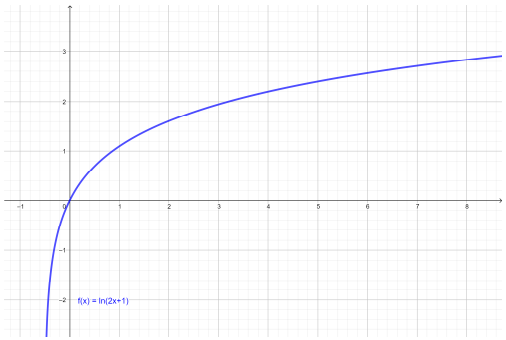
- Las <u>funciones radicales</u> (con raíces de **índice par**) solo están definidas para radicandos mayores o iguales que cero.

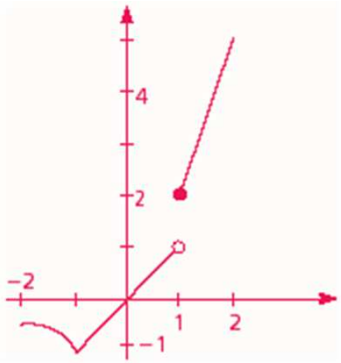
  $f(x) = \sqrt{x-2}$ Dom f = [2, +∞)

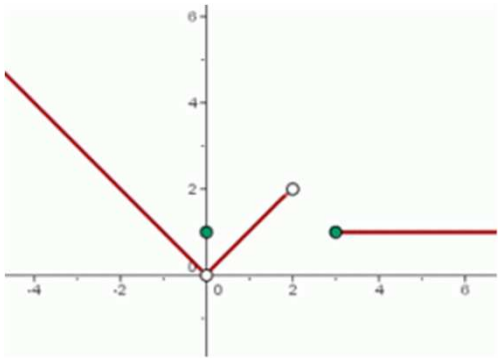
2. DOMINIO Y RECORRIDO

¿Cómo se calcula el recorrido?

- Este curso, utilizaremos su representación gráfica y los tipos de discontinuidad para indicar el recorrido de algunas funciones.







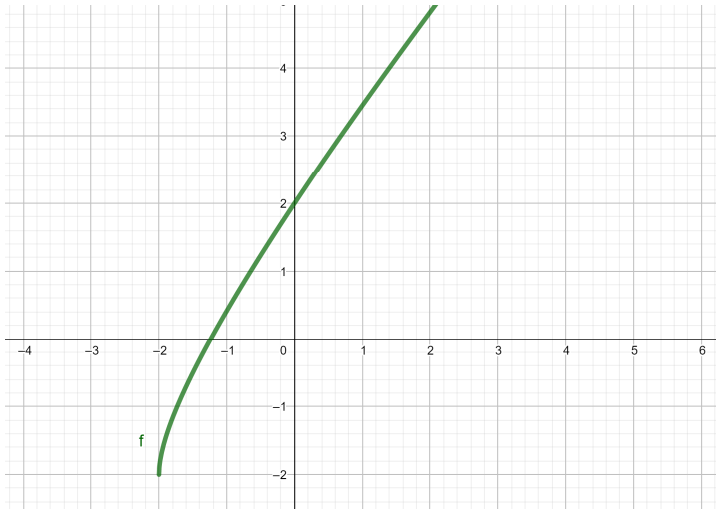
2. DOMINIO Y RECORRIDO: EJERCICIOS

Calcula el dominio de las siguientes funciones:

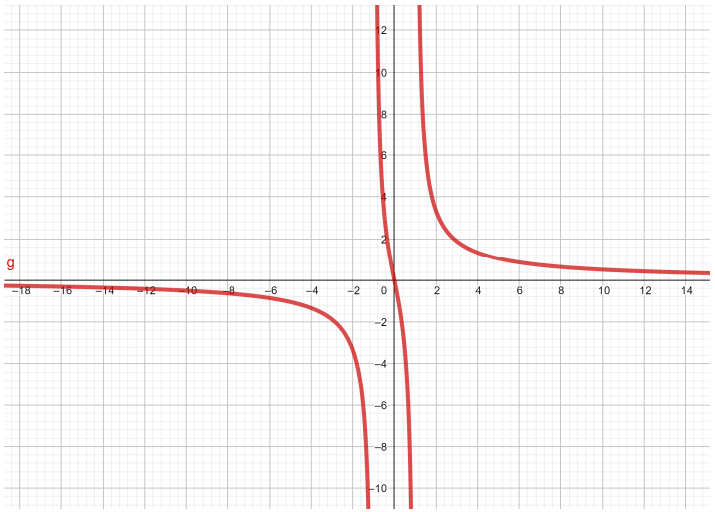
1. $f(x) = x + \sqrt{2x + 4}$
2. $g(x) = \dfrac{5x}{x^2 - 1}$
3. $h(x) = 2x^3 + x^2 + 6$

2. DOMINIO Y RECORRIDO: EJERCICIOS

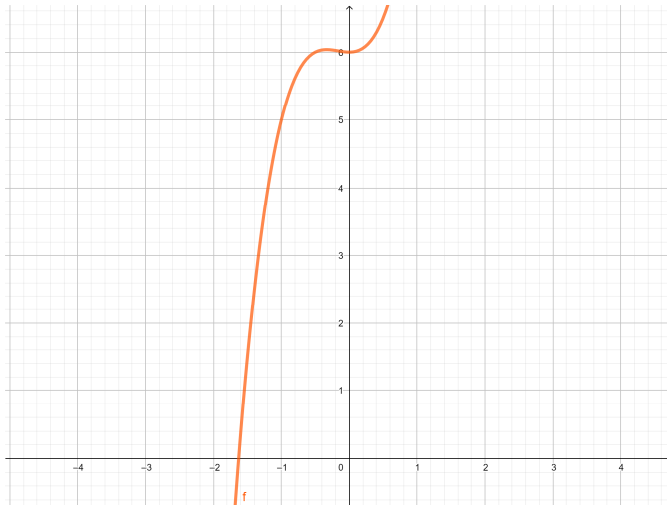
$$f(x) = x + \sqrt{2x + 4}$$



$$g(x) = \frac{5x}{x^2 - 1}$$



$$h(x) = 2x^3 + x^2 + 6$$



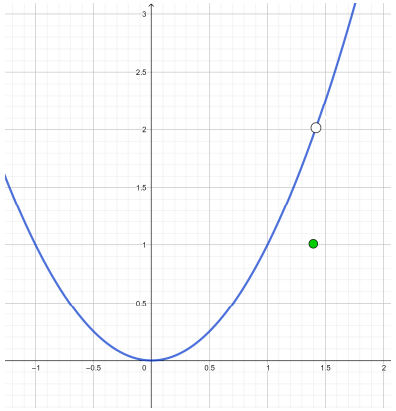
3. CONTINUIDAD

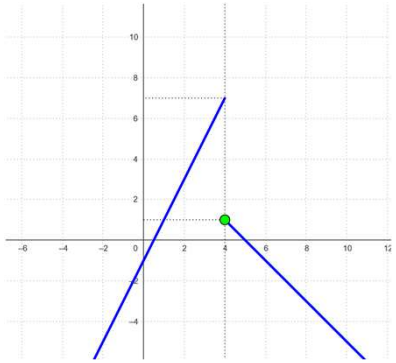
¿Qué es una función continua?

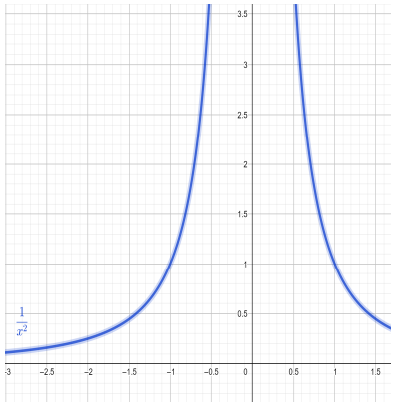
Una función es continua si no se producen "saltos" al dibujarla.

- Tipos de discontinuidad
  - Evitable
  - No evitable
    - De salto finito
    - De salto infinito

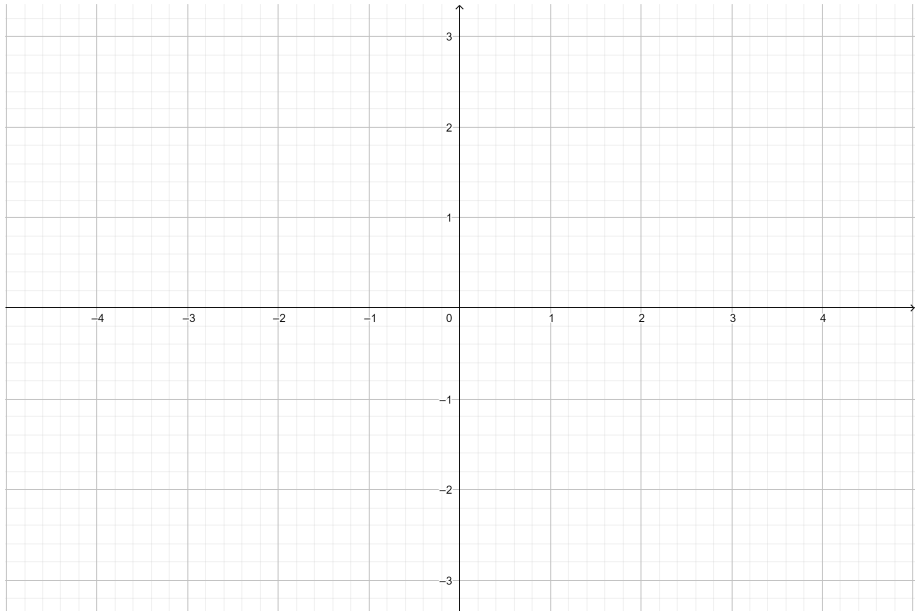
Ejercicio 17 página 184







4. PUNTOS DE CORTE



<u>Puntos de corte con el eje X</u>

(a, 0)

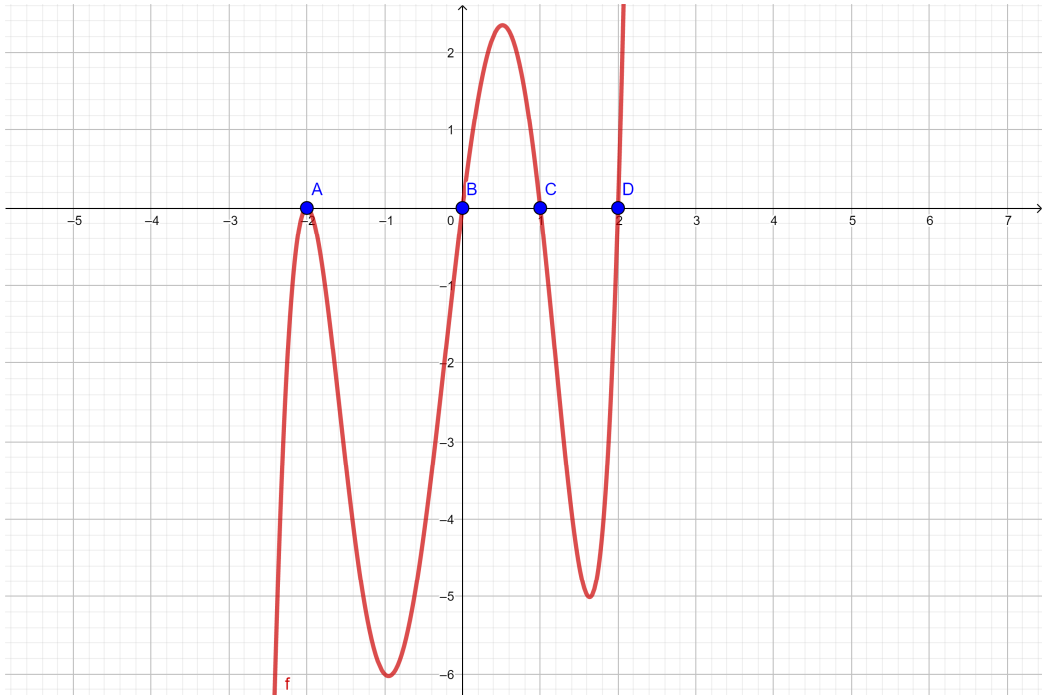
Se calcula despejando: f(a) = 0

<u>Puntos de corte con el eje Y</u>

(0, b)

Se calcula operando: f(0) = b

4. PUNTOS DE CORTE



<u>Raíces de una función</u>:

Puntos de corte con el eje x:

- En una recta (polinomio grado 1)
  → resolver la ecuación
- En una parábola (polinomio grado 2)
  → fórmula de Carnot
- En un polinomio de grado n>2
  → Ruffini

4. PUNTOS DE CORTE: EJERCICIOS

Halla los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{x}{4} - 2$

2. $g(x) = x^2 - x - 2$

3. $h(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

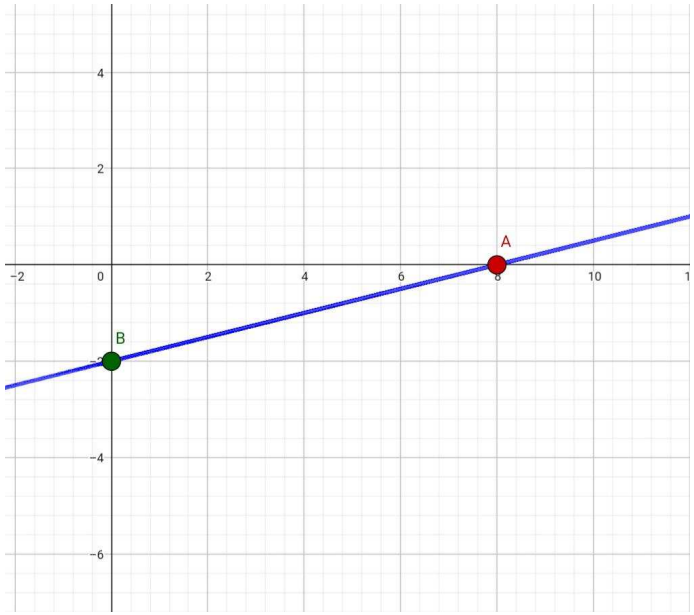
4. $j(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

4. PUNTOS DE CORTE: EJERCICIOS

$$f(x) = \frac{x}{4} - 2$$

- Raíces (corte con el eje X)
  A (8,0)

- Ordenada en el origen
  (corte con el eje y)
  B(0,-2)

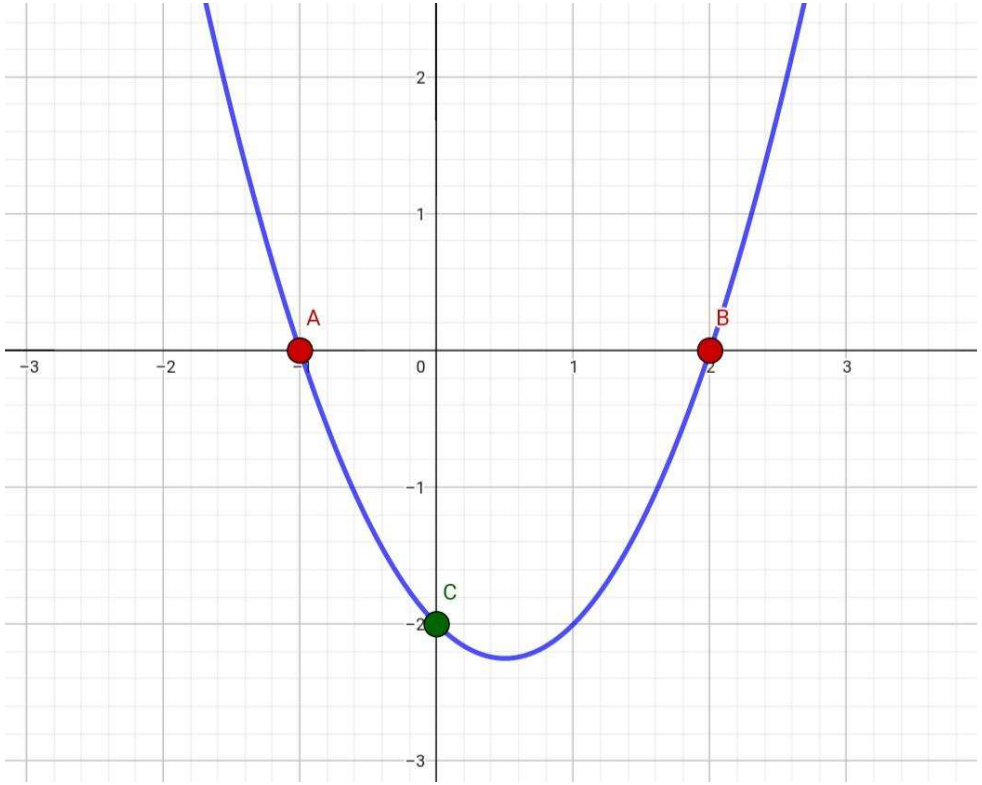


4. PUNTOS DE CORTE: EJERCICIOS

$$g(x) = x^2 - x - 2$$

- Raíces (corte con el eje X)
  A (-1,0)
  B (2, 0)

- Ordenada en el origen (corte con el eje y)
  C (0,-2)

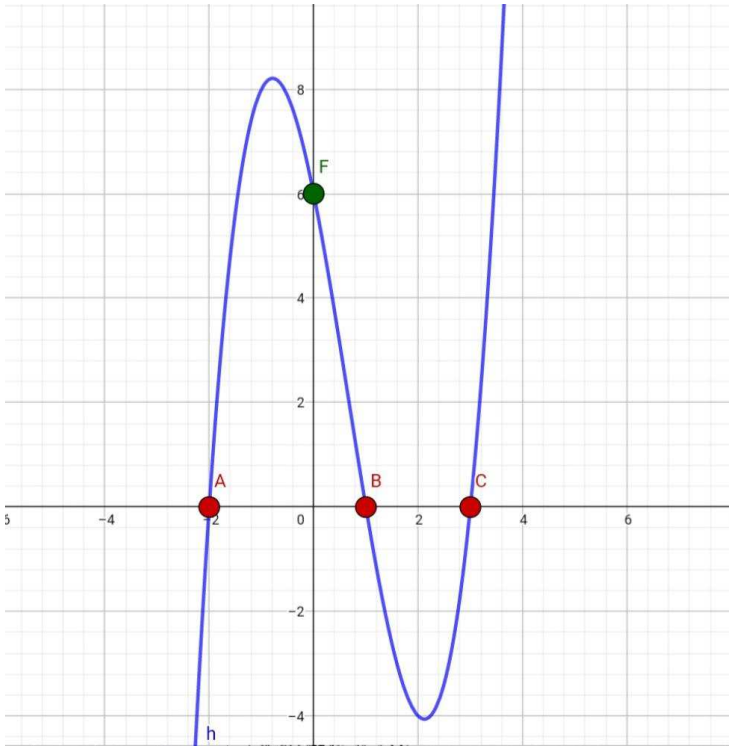


4. PUNTOS DE CORTE: EJERCICIOS

$$h(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

- Raíces (corte con el eje X)
  A (-2,0)
  B (1, 0)
  C (3, 0)

- Ordenada en el origen (corte con el eje y)
  F (0,6)

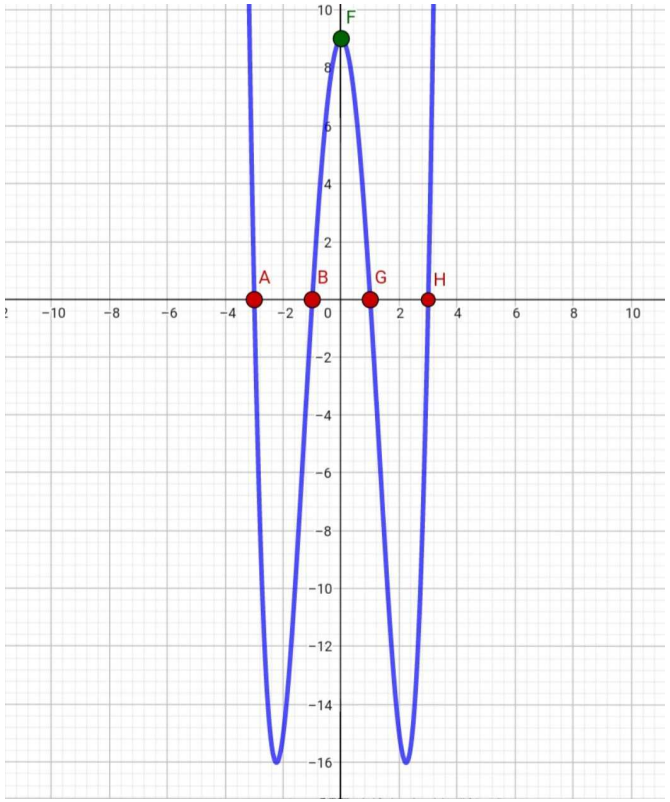


4. PUNTOS DE CORTE: EJERCICIOS

$$j(x) = x^4 - 10\,x^2 + 9$$

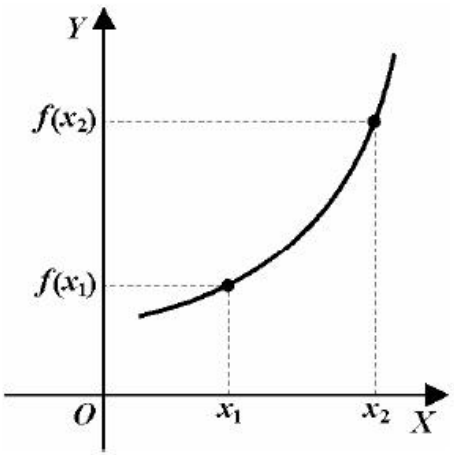
- Raíces (corte con el eje X)
  A (-3,0)
  B (-1, 0)
  G (1, 0)
  H (3, 0)

- Ordenada en el origen (corte con el eje y)
  F (0,9)



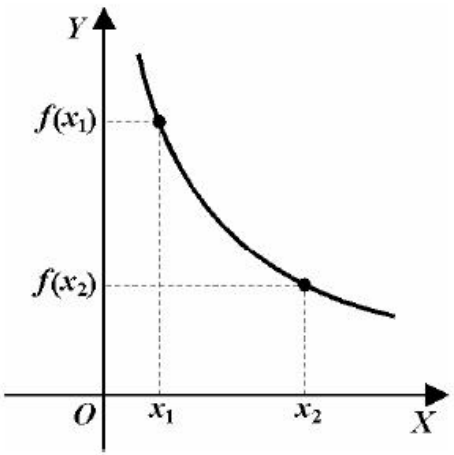
5. MONOTONÍA

Estudio del crecimiento/decrecimiento de una función, así como sus puntos máximos y mínimos



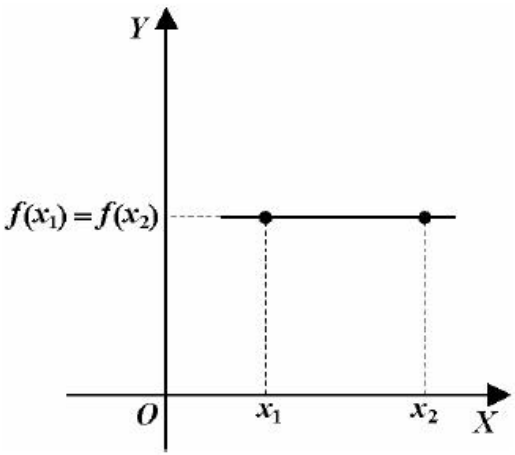
Función creciente

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



Función decreciente

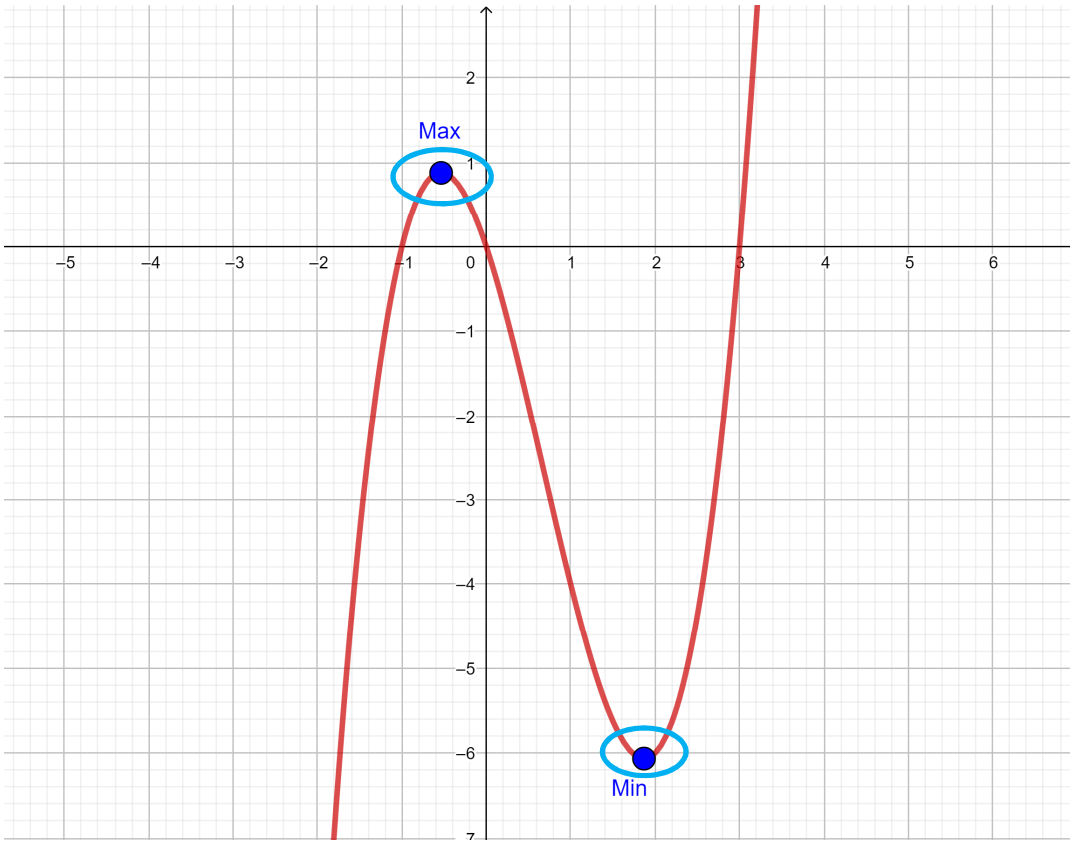
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



Función constante

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

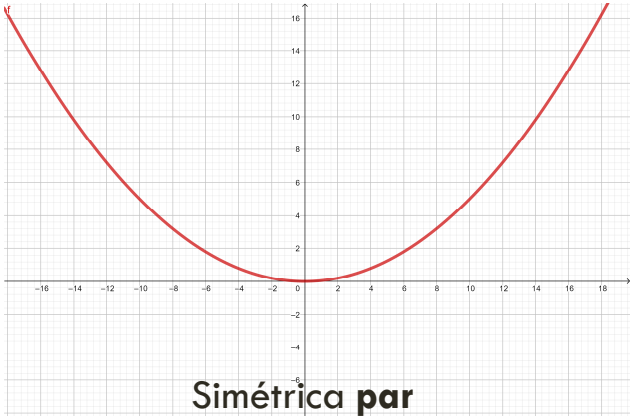
5. MONOTONÍA



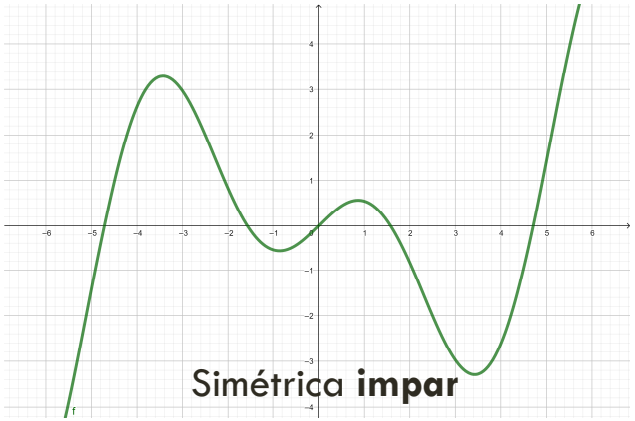
Extremos de una función:

- <u>Máximo</u>: punto del dominio de la función con mayor valor que los de su entorno.
  - *Relativo*: todos los puntos que cumplen esta condición.
  - *Absoluto*: máximo relativo de mayor valor
- <u>Mínimo</u>: punto del dominio de la función con valor menor que todos los de su entorno.
  - *Relativo*: todos los puntos que cumplen esta condición.
  - *Absoluto*: mínimo relativo de menor valor

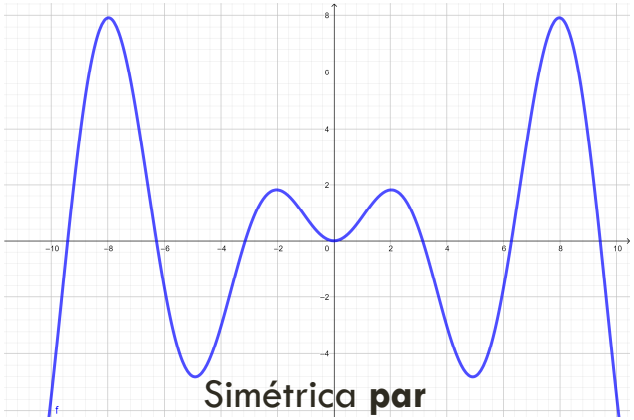
6. SIMETRÍA



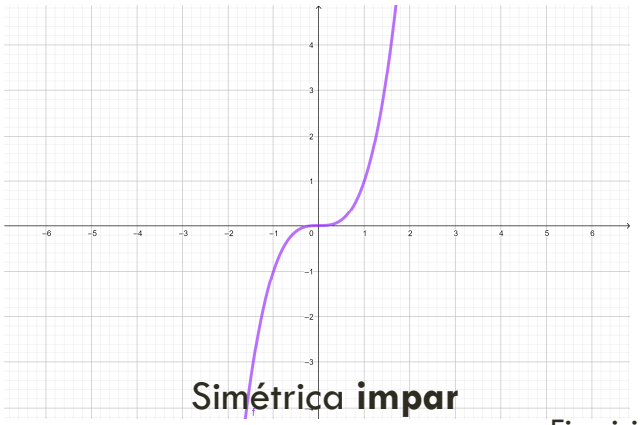
Simétrica **par**



Simétrica **impar**



Simétrica **par**



Simétrica **impar**

Ejercicios 90 y 92 página 195

6. SIMETRÍA

Analíticamente:

- Simetría par:

  $f(-x) = f(x)$

- Simetría impar:

  $f(-x) = -f(x)$

1. $f(x) = x^4 - 3x^2$
2. $f(x) = x^3 - 4x$
3. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$
4. $f(x) = 5x + 3$

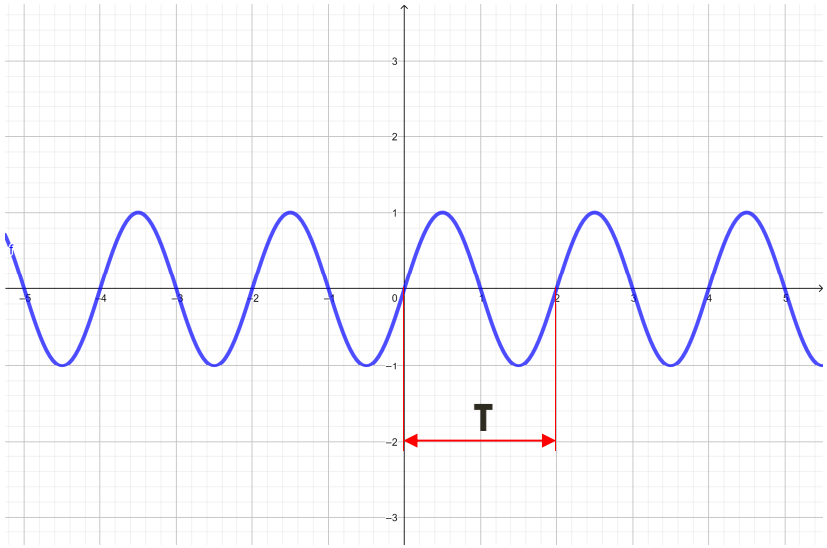
7. PERIODICIDAD

Una función es periódica cuando los valores de f(x) se repiten cada cierto intervalo.

Vamos a estudiar la periodicidad ***gráficamente*** *solo. Tenemos que saber identificar:*

- si la función es periódica o no.

- y si es periódica determinar su período



Ejercicio 94 página 195

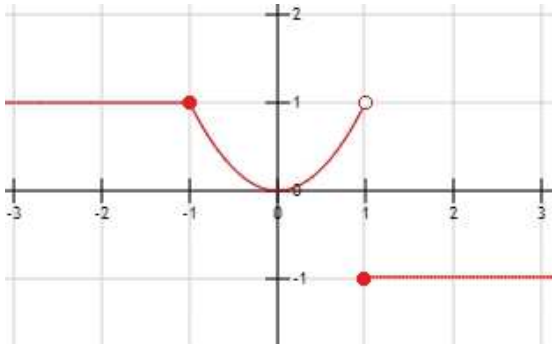
* ¿QUÉ ES "*ESTUDIAR UNA FUNCIÓN*"? *

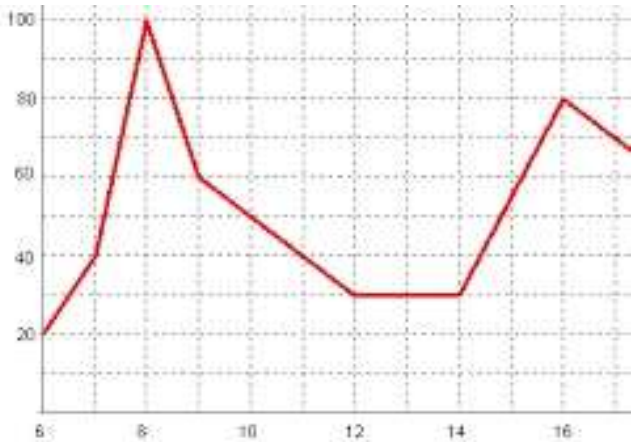
Dar toda la información sobre ella que podamos:

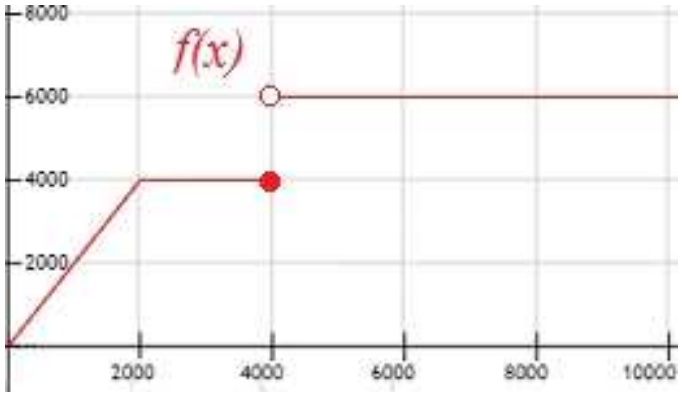
1. Dominio y recorrido
2. Continuidad: (decir en qué puntos es discontinua y de qué tipo)
3. Puntos de corte con los ejes
4. Monotonía:
   - Decir en qué intervalos es creciente, decreciente y constante
   - Indicar los máximos y mínimos
5. Simetría
6. Periodicidad (solo si conocemos su gráfica)

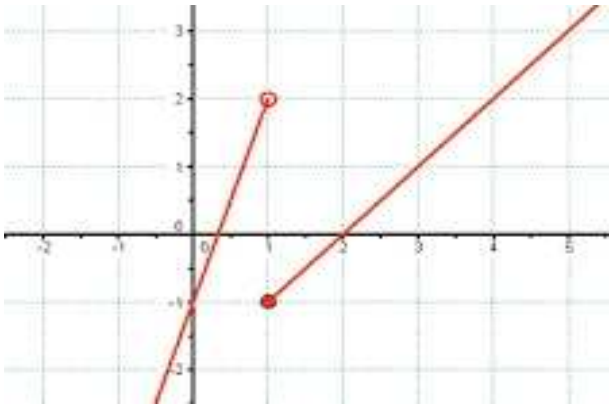
*Ejercicio 34 página 189; Ejercicio 47: **ESTUDIAR** las funciones (dominio, puntos de corte y simetría)*

8. FUNCIONES A TROZOS









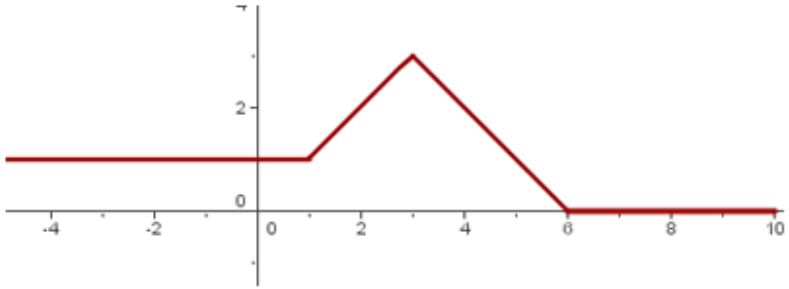
8. FUNCIONES A TROZOS

Tienen distintas expresiones algebraicas para diferentes intervalos.

De estas funciones vamos a trabajar:

- Pasar de su expresión algebraica a la gráfica

$$f(x)=\begin{cases} 1 & si \quad x \le 1 \\ x & si \quad 1 < x \le 3 \\ -x+6 & si \quad 3 < x \le 6 \\ 0 & si \quad 6 < x \end{cases}$$



- Estudiar su dominio y recorrido

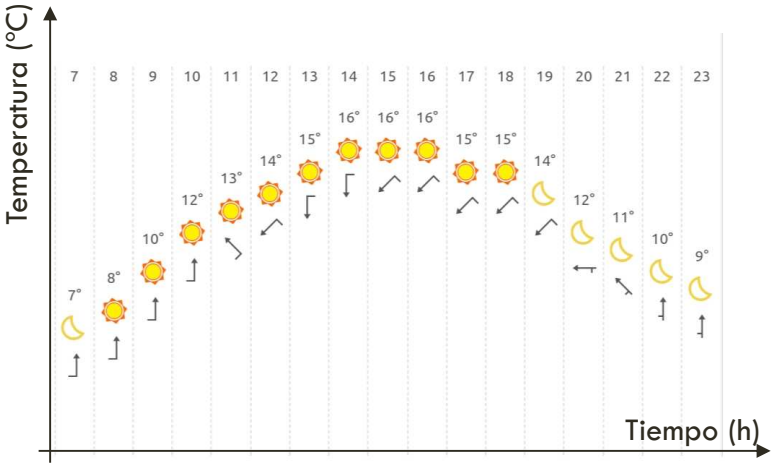
Deberes: 102 y 105

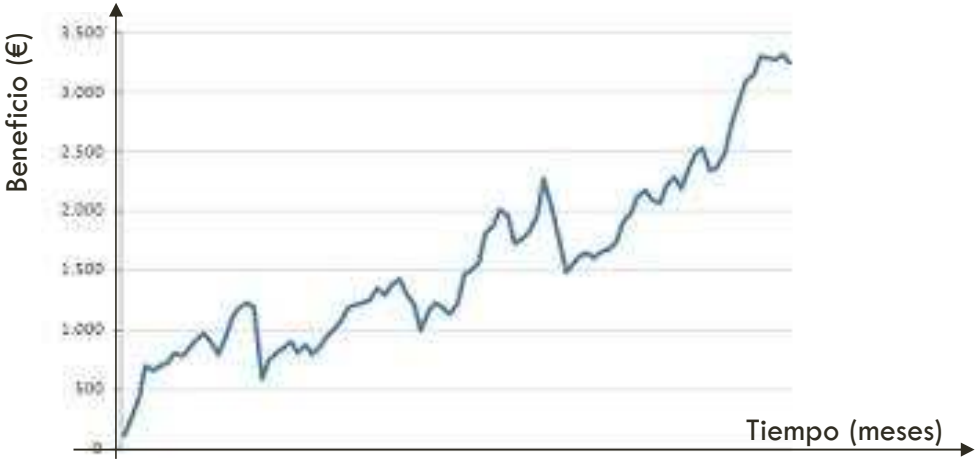
9. TASA DE VARIACIÓN MEDIA (TVM)

Como vimos al principio, las funciones se utilizan para analizar situaciones reales. Se aplican a numerosos campos de estudio, porque dan mucha información útil.

Hay parámetros que nos ayudan a extraer esa información. Este año vamos a ver:

- Tasa de Variación
- Tasa de Variación Media (TVM)





9. TASA DE VARIACIÓN MEDIA (TVM)

El autobús en el que circulamos viaja a 50 km/h durante 2 horas y después acelera para seguir circulando a 100 km/h. **La distancia** que recorremos viene dada por la función:

$$f(x) = \begin{cases} 50\,x & : 0 \leq x < 2 \\ 100 + 100\,(x-2) & : 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Calcula:

A) ¿Qué distancia se recorre durante las tres primeras horas?

B) ¿Qué distancia se recorre entre la primera hora y la cuarta hora?

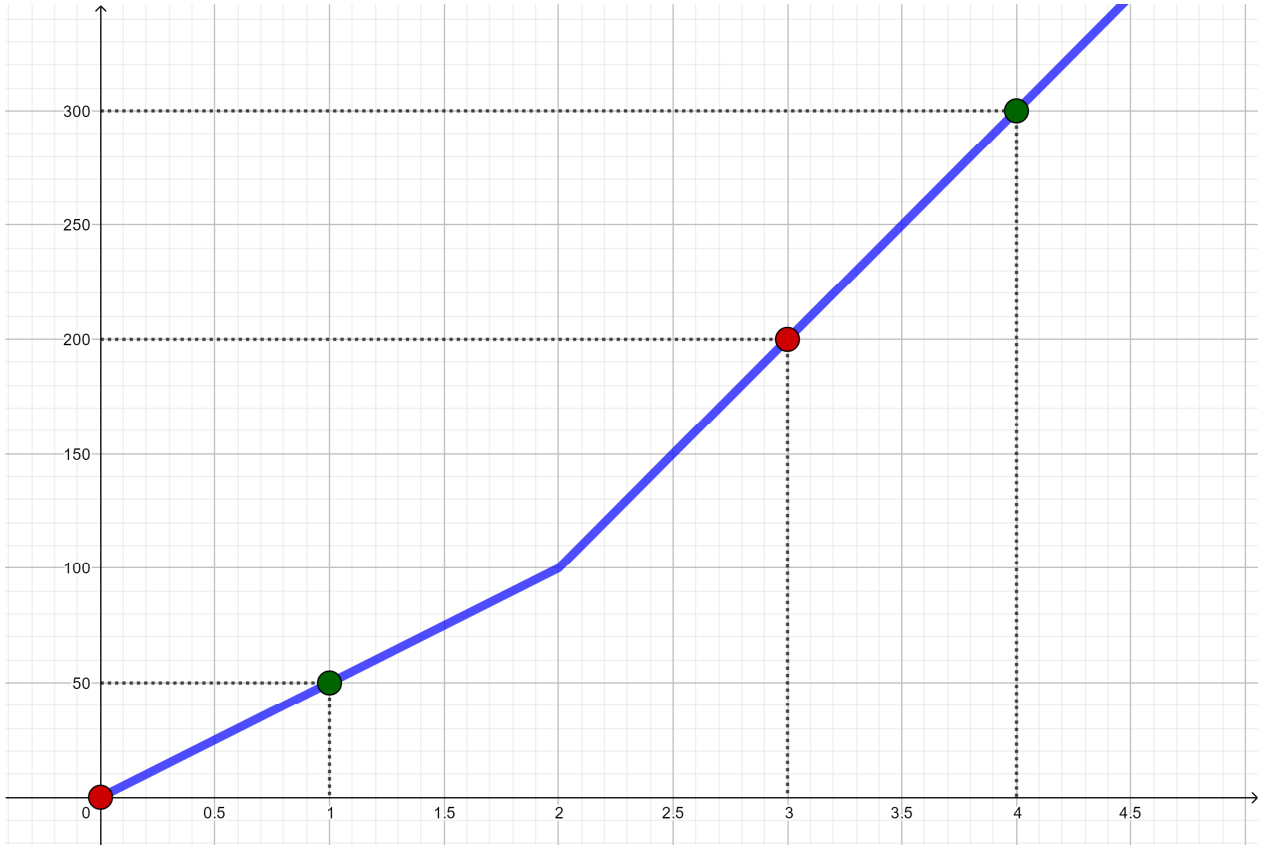
C) ¿Cuál es la velocidad media entre la primera y la tercera hora? ¿Y entre la primera y cuarta hora?

9. TASA DE VARIACIÓN MEDIA (TVM)

A) ¿Qué distancia se recorre durante las tres primeras horas?

B) ¿Qué distancia se recorre entre la primera hora y la cuarta hora?

$$f(x) = \begin{cases} 50\,x & : 0 \leq x < 2 \\ 100 + 100\,(x-2) & : 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$



9. TASA DE VARIACIÓN MEDIA (TVM)

Tasa de Variación:

La tasa de variación de una función entre dos puntos a y b es la diferencia entre el valor de la función para x=a y el valor para x=b

$$TV\ [a,b]=f(b) - f(a)$$

TV [0,3] = f(3) - f(0) = 200 – 0 = 200

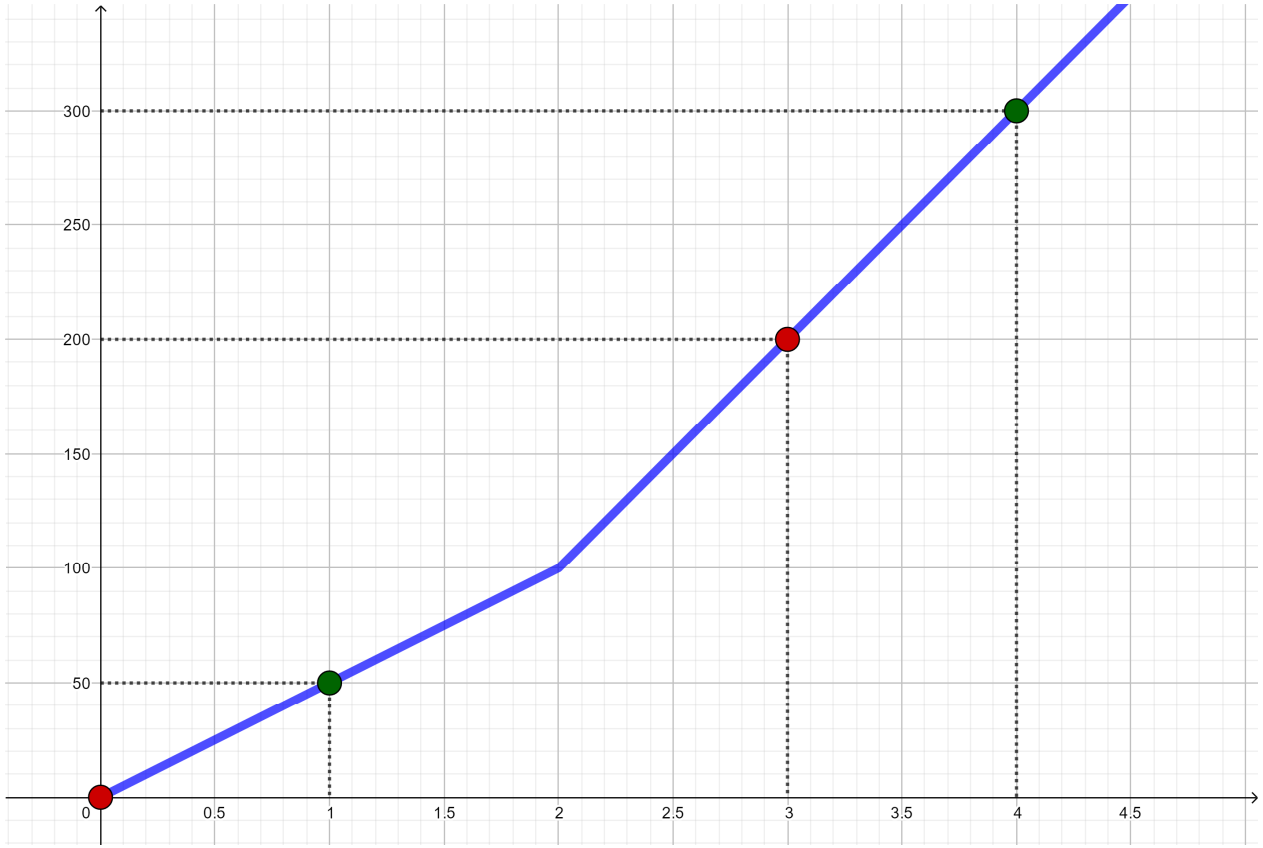
TV [1,4] = f(4) - f(1) = 300 – 50 = 250

9. TASA DE VARIACIÓN MEDIA (TVM)

C) ¿Cuál es la velocidad media entre la primera y la tercera hora?

¿Y entre la primera y cuarta hora?

$$f(x) = \begin{cases} 50\,x & : 0 \leq x < 2 \\ 100 + 100\,(x-2) & : 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$



9. TASA DE VARIACIÓN MEDIA (TVM)

<u>Tasa de Variación Media</u>:

La tasa de variación media (o velocidad) de una función entre dos puntos a y b es el cociente entre su tasa de variación y la diferencia entre a y b.

$$TVM\ [a,b] = \frac{TV\ [a,b]}{b-a} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$TVM\ [0,3] = \frac{TV\ [0,3]}{3-0} = \frac{f(3) - f(0)}{3-0} = \frac{200}{3} = 66{,}67\ km/h$$

$$TVM\ [1,4] = \frac{TV\ [1,4]}{4-1} = \frac{f(4) - f(1)}{4-1} = \frac{250}{3} = 83{,}33\ km/h$$

Ejercicios 80 y 81