12 Vectores

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO:

4.1 Los vectores como desplazamientos en el plano y en el espacio; componentes de un vector; representación en columna; suma y diferencia de dos vectores; el vector nulo, el vector –**v**; multiplicación por un escalar; módulo de un vector; vectores unitarios; la base ***i***, ***j***, ***k***; vectores de posición.

4.2 Producto escalar de dos vectores; vectores perpendiculares; vectores paralelos; ángulo entre vectores.

4.3 Ecuación vectorial de una recta en dos y tres dimensiones; ángulo entre dos rectas.

4.4 Rectas coincidentes y paralelas; punto de intersección entre dos rectas; determinación de la posición relativa de dos rectas.

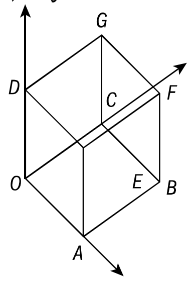
Antes de comenzar

Qué necesitamos saber

1 Usar coordenadas en tres dimensiones
Por ejemplo: *OABCDEFG* es un cubo de lado 2 unidades. *A* pertenece al eje *x*, *C* pertenece al eje *y* y *D* pertenece al eje *z*. Escribir las coordenadas de *A*, *B* y *F*
A tiene coordenadas $(2, 0, 0)$.

B tiene coordenadas $(2, 2, 0)$.

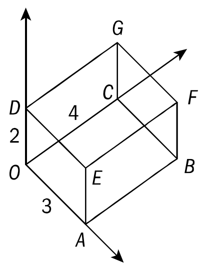
F tiene coordenadas $(2, 2, 2)$.



2 Usar el teorema de Pitágoras
Por ejemplo: Hallar la longitud de la hipotenusa, *x*, de un triángulo cuyos otros lados miden 4 cm, 7 cm
$x^2 = 7^2 + 4^2 = 65$
$x = \sqrt{65} = 8{,}06\,\text{cm}$

Comprobemos nuestras habilidades

1 El prisma *OABCDEFG* es tal que *OA* mide 3 unidades, *OC* 4 unidades y *OD* 2 unidades. *A* pertenece al eje *x*, *C* al eje *y* y *D* al eje *z*.



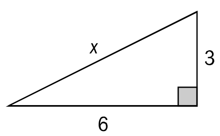
Dé las coordenadas de

a *A* **b** *B*

c *E* **d** *F*

e *H*, el punto medio de *GF*

2 Halle la longitud de la hipotenusa, *x*.



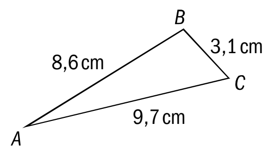
3 Usar el teorema del coseno
Por ejemplo: En el triángulo PQR, $PQ = 6\,\text{cm}$, $QR = 11\,\text{cm}$ y $\hat{Q} = 95°$.
Calcular la longitud de PR

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2PQ \times QR \times \cos 95°$$
$$= 6^2 + 11^2 - 2 \times 6 \times 11 \times \cos 95°$$
$$= 168{,}50\ldots$$
$$PR = 13{,}0\,\text{cm (3 cs)}$$

3 **a** En el triángulo ABC, $AB = 9\,\text{cm}$, $BC = 15\,\text{cm}$ y el ángulo $ABC = 110°$. Calcule la longitud de AC al centímetro más próximo.

b En el triángulo ABC, $AB = 8{,}6\,\text{cm}$, $BC = 3{,}1\,\text{cm}$ y $AC = 9{,}7\text{cm}$.

Diagrama no dibujado a escala



Calcule el ángulo ABC, al grado más próximo.

Algunas cantidades pueden describirse mediante un número: solo se requiere un dato. Por ejemplo, la temperatura normal del cuerpo humano es de 37 °C, la longitud del río Amazonas es de 6400 km, la densidad del agua es de $1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Estas cantidades quedan determinadas por la magnitud (medida) solamente y se denominan **escalares**.

Sin embargo, otras cantidades requieren, para su definición completa, no solamente de una magnitud sino también de una dirección. Tales cantidades se denominan **vectores**. Si queremos volar de Londres a París y nos dicen que la distancia es de 340 km, esta información resulta inútil hasta que nos digan en qué dirección necesitamos viajar.

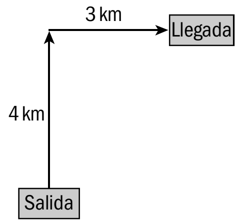
Los vectores se emplean comúnmente en una rama de la física llamada mecánica. Se usan para representar cantidades tales como el desplazamiento, la fuerza, el peso, la velocidad y el momento. En matemáticas, los vectores nos interesan principalmente para representar desplazamientos y velocidades. El ejercicio final de este capítulo tiene una serie de preguntas donde podremos ver estas aplicaciones tanto en problemas de dos dimensiones (plano) como de tres dimensiones (espacio). Este capítulo trata de los conceptos básicos, el vocabulario y la notación de vectores, y a continuación, de las operaciones básicas y la geometría de vectores.

La función de los vectores en la mecánica puede ser un tema interesante para explorar.

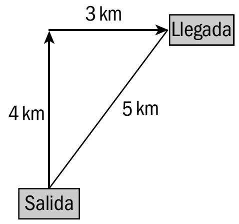
12.1 Vectores: conceptos básicos

Si nos trasladamos 4 km hacia el Norte y 3 km hacia el Este, ¿qué distancia recorrimos?

Quizás se trate de una pregunta sencilla, pero podemos contestarla de dos maneras igualmente válidas:



- Una respuesta para esta pregunta es decir que recorrimos 7 km. Esta es la **distancia** total que recorrimos (4 + 3 = 7 km).



- Una segunda respuesta a esta pregunta es decir que recorrimos 5 km. Este valor se halla usando el teorema de Pitágoras ($\sqrt{4^2+3^2}$ = 5 kilómetros). A este valor se le llama **desplazamiento**. El desplazamiento mide la diferencia entre la posición de salida y la de llegada.

Vectores y escalares

> ➔ Un **vector** es una cantidad que tiene **medida** (magnitud) y **dirección**. El desplazamiento y la velocidad son dos cantidades vectoriales.
>
> ➔ Un **escalar** es una cantidad que tiene medida pero no dirección. La distancia y la celeridad son dos cantidades escalares.

Como se vio anteriormente, la distancia y el desplazamiento tienen distintos significados. Esto también es cierto para la velocidad y la celeridad. La celeridad se refiere a cuán rápido viaja un objeto, mientras que la velocidad se refiere a la razón a la cual cambia su posición.

Por ejemplo, si un automóvil viaja a 90 kilómetros por hora, esta es su celeridad.

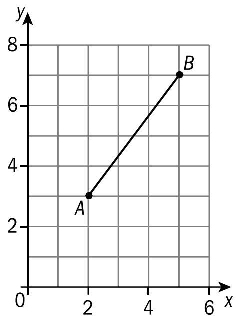
Si ese automóvil recorriera una pista cuyo punto de partida coincide con el de llegada, su velocidad cuando regresa al punto de partida sería 0.

Si el mismo automóvil estuviese recorriendo un camino recto en dirección Oeste, después de una hora diríamos que su velocidad es de 90 kilómetros por hora en dirección Oeste.

Representación de vectores

Los vectores se representan mediante segmentos orientados. La longitud del segmento indica la medida de la cantidad que representa el vector, y la dirección del segmento (representada por una flecha) indica la dirección del vector.

Considere los puntos $A(2, 3)$ y $B(5, 7)$ en el plano cartesiano:



Para describir el movimiento desde A hasta B podríamos decir "nos movemos 3 unidades en la dirección positiva del eje x y 4 unidades en la dirección positiva del eje y". El 3 se denomina la **componente horizontal** (o x), el 4 es la **componente vertical** (o y). Tanto la dirección como la longitud del movimiento tienen importancia y, por lo tanto, el uso de un vector se presta para describir la situación.

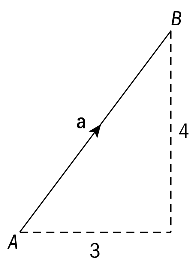
Este vector puede representarse en una variedad de formas:

En el diagrama, el segmento AB representa el vector $\overrightarrow{AB}$, donde la flecha por encima de las letras indica la dirección del movimiento (desde A hasta B). Las componentes del vector se representan aquí usando un **vector columna**.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Los vectores también pueden representarse usando una letra minúscula en **negrita**.
Por ejemplo, podríamos usar **a** para representar el vector $\overrightarrow{AB}$.

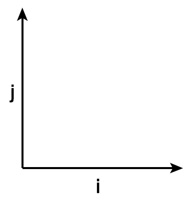
$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$



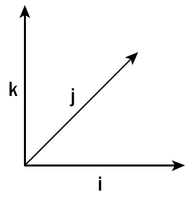
En un vector columna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, la x representa un movimiento en la dirección positiva del eje x y la y un movimiento en la dirección positiva del eje y.

Es difícil escribir las letras en negrita a mano; por eso, debemos subrayarlas para indicar que se trata de un vector. Así, **a** escrito a mano sería <u>a</u>.

Finalmente, el vector se puede representar mediante **vectores unitarios** o versores. Podemos escribir $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ como $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, donde $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ son vectores de medida 1 en las direcciones de los ejes x e y respectivamente. A $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ se les llama vectores base.



Por consiguiente, el vector $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ representa un movimiento de 3 unidades en la dirección positiva del eje x y 4 en la dirección positiva del eje y.



Del mismo modo en que consideramos objetos que se mueven sobre el plano, también podemos pensar en objetos que se mueven en el espacio tridimensional. Podemos representar un vector en tres dimensiones de forma similar, pero necesitamos introducir la letra $\mathbf{k}$ para el vector de longitud 1 en la dirección del eje z.

Por lo tanto, ahora tenemos tres componentes.

$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ representa un movimiento de 3 unidades en la dirección positiva del eje x, 2 unidades en la dirección negativa del eje y y 1 unidad en la dirección positiva del eje z.

➔ El vector unitario en la dirección del eje x es $\mathbf{i}$.

En dos dimensiones, $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y en tres dimensiones, $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

➔ El vector unitario en la dirección del eje y es $\mathbf{j}$.

En dos dimensiones, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y en tres dimensiones, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

➔ En tres dimensiones, el vector unitario en la dirección del eje z es $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Los vectores **i**, **j** y **k** se llaman **vectores base**.

Ejemplo 1

a Escriba $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ utilizando vectores unitarios.

b Escriba $-\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$ en forma de vector columna.

Respuestas:

a $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$

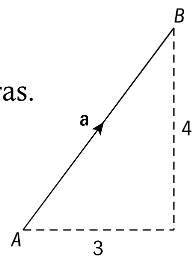
b $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Aquí el coeficiente de la componente j es 0.

La magnitud de un vector

La **magnitud** de $\overrightarrow{AB}$ es la longitud del vector y se denota con $|\overrightarrow{AB}|$.
La magnitud se calcula usando el teorema de Pitágoras.

Si $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, entonces $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$



Otros nombres para la magnitud son módulo, longitud, norma y medida.

➔ Si $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, entonces $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

En tres dimensiones esto se transforma en:

➔ Si $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, entonces $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Ejemplo 2

Halle la magnitud de estos vectores:

a $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Respuestas

a $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$

b $\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{14} = 3{,}74$ (3 cs)

Cuando los físicos resuelven problemas de "aceleración uniforme" y "caída libre bajo el efecto de gravedad", necesitan considerar la magnitud y la dirección del vector aceleración. Este es un concepto interesante para explorar con mayor profundidad.

Ejercitación 12A

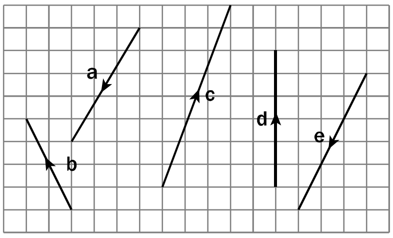
1 Escriba estos vectores utilizando vectores unitarios.

a $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b** $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ **c** $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2 Escriba estos vectores en forma de vectores columna.

a $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ **b** $\overrightarrow{CD} = -\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$ **c** $\overrightarrow{EF} = \mathbf{k}$

3 Escriba los vectores **a**, **b**, **c**, **d** y **e** utilizando vectores unitarios y en forma de vectores columna.



4 Halle la magnitud de cada vector.

a $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ **c** $2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ **d** $\begin{pmatrix} 2{,}8 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$ **e** $2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

5 Halle la magnitud de cada vector.

a $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ **c** $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ **d** $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ **e** $\mathbf{j} - \mathbf{k}$

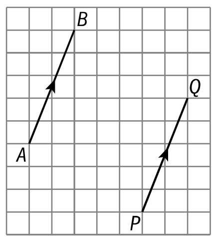
Vectores iguales, negativos y paralelos

➔ Dos vectores son **iguales** si tienen igual dirección, sentido y magnitud; sus componentes $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, y $\boldsymbol{k}$ son iguales también y, por lo tanto, los vectores columna son iguales.

No importa en qué lugar del plano cartesiano se encuentran estos vectores: siguen siendo iguales.

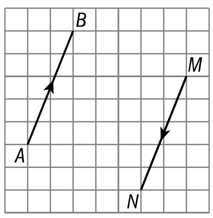
Considere lo siguiente:

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ tienen igual dirección (son paralelos) y sentido, y tienen igual magnitud. En consecuencia, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$.



Si dos vectores paralelos tienen igual longitud, tendrán las mismas componentes. Aquí $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Los dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{MN}$ tienen igual magnitud pero distintos sentidos.
Por lo tanto, $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{MN}$.



Aquí, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ y, por lo tanto, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{MN}$.

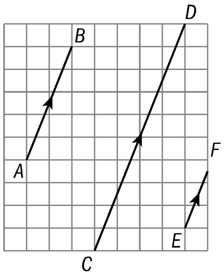
La dirección de un vector es importante, no solamente su longitud.

$\overrightarrow{MN}$ se llama el **vector opuesto**.

➔ Podemos escribir $\overrightarrow{AB}$ como $-\overrightarrow{BA}$.

Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ son todos **paralelos** pero tienen distintas magnitudes.

Aquí, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{EF}$.



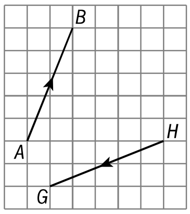
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = 4\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = 1\mathbf{i} + 2{,}5\mathbf{j}$

➔ Dos vectores son **paralelos** si uno es un múltiplo escalar del otro. Por lo tanto, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{RS}$ son paralelos si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{RS}$, donde k es una cantidad escalar. Lo dicho puede escribirse como $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$.

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{GH}$ tienen igual magnitud (29), pero diferentes direcciones. Por lo tanto, $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{GH}$.



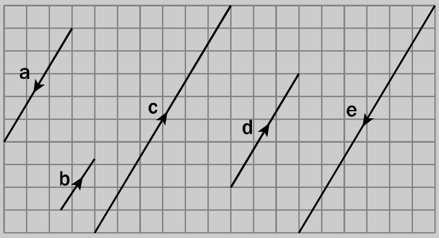
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

$\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

No podemos multiplicar $\overrightarrow{AB}$ por un escalar para obtener $\overrightarrow{GH}$.

Ejemplo 3

El diagrama muestra algunos vectores:



Escriba cada uno de los demás vectores en función del vector **a**.

Respuesta

Del diagrama podemos observar lo siguiente:

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \end{pmatrix}$;

▶ Continúa en la página siguiente.

Por tanto, $\mathbf{b} = -\frac{1}{2}\mathbf{a}$	***b*** *es paralelo a* ***a****, en sentido opuesto; la magnitud de* ***b*** *es la mitad de la de* ***a****.*
$\mathbf{c} = -2\mathbf{a}$	***c*** *tiene sentido opuesto al de* ***a****; la magnitud de* ***c*** *es el doble de la de* ***a****.*
$\mathbf{d} = -\mathbf{a}$	***d*** *tiene sentido opuesto al de de* ***a****; la magnitud de* ***d*** *es igual a la de* ***a****.*
$\mathbf{e} = 2\mathbf{a}$	***e*** *tiene igual dirección y sentido que* ***a****; la magnitud de* ***e*** *es el doble de la de* ***a****.*

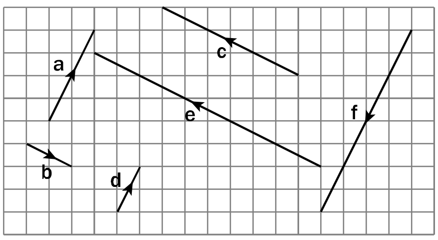
Ejemplo 4

¿Para qué valores de s y t estos dos vectores resultan paralelos?
$\mathbf{m} = 3\mathbf{i} + t\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{n} = 9\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + s\mathbf{k}$

Respuesta	
Por ser vectores paralelos, $\mathbf{m} = k\mathbf{n}$ $3\mathbf{i} + t\mathbf{j} - 6\mathbf{k} = k(9\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + s\mathbf{k})$ $3\mathbf{i} + t\mathbf{j} - 6\mathbf{k} = 9k\mathbf{i} - 12k\mathbf{j} + sk\mathbf{k}$	*Aplicar la propiedad distributiva e igualar los coeficientes*
$3 = 9k$ $k = \frac{1}{3}$	*Igualando las componentes* ***i***
Por lo tanto, $t = -12 \times \frac{1}{3} = -4$	*Igualando las componentes* ***j***
$-6 = s \times \frac{1}{3} \Rightarrow s = -18$	*Igualando las componentes* ***k***

Ejercitación 12B

1 El diagrama muestra algunos vectores.



a Escriba los vectores **c**, **d**, **e** y **f** en función de los vectores **a** o **b**.

b ¿De qué manera se relacionan **a** y **b**?

2 ¿Cuáles de estos vectores son paralelos a $\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$?

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}7 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$ $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -0{,}05 \\ -0{,}03 \end{pmatrix}$

$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -10 \\ 70 \end{pmatrix}$ $\mathbf{e} = 60\mathbf{i} + 420\mathbf{j}$ $\mathbf{f} = 6\mathbf{i} - 42\mathbf{j}$

$\mathbf{g} = -\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

3 ¿Para qué valor de t estos dos vectores resultan paralelos?

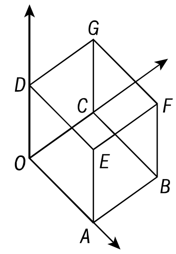
a $\mathbf{r} = 4\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ y $\mathbf{s} = 14\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$

b $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} t \\ -8 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \end{pmatrix}$

4 ¿Para qué valores de t y s estos dos vectores resultan paralelos?

$\mathbf{v} = t\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + s\mathbf{k}$

5 En el cubo *OABCDEFG* la longitud de cada arista es de una unidad.
Exprese estos vectores en función de **i**, **j** y **k**.



a $\overrightarrow{OG}$

b $\overrightarrow{BD}$

c $\overrightarrow{AD}$

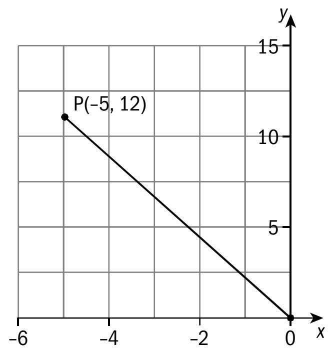
d $\overrightarrow{OM}$ donde M es el punto medio de GF.

6 Repita la pregunta 5 sabiendo que *OABCDEFG* es un prisma rectangular donde $OA = 5$ unidades, $OC = 4$ unidades y $OD = 3$ unidades.

Vectores de posición

Los **vectores de posición** son vectores que dan la posición relativa de un punto respecto de un punto fijo O.

El punto P con coordenadas (–5,12) tiene vector de posición $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} = -5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$.

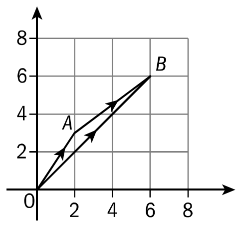


➔ El punto P con coordenadas (x, y) tiene vector de posición

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

Vectores resultantes

Considere los puntos $A(2, 3)$ y $B(6, 6)$.
El diagrama muestra los vectores de posición de A y B. Podemos ver que el vector $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
También vemos que el movimiento desde A hasta B podría describirse como un movimiento directo de A a B, o como un movimiento de A a O seguido de un movimiento de O a B.



Recordemos que $\overrightarrow{AB}$ debe escribirse como vector, no como par ordenado.

Así, podríamos escribir $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$.

El vector $\overrightarrow{AB}$ se llama resultante de los vectores $\overrightarrow{AO}$ y $\overrightarrow{OB}$.

Recordemos que $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$,

y por lo tanto,

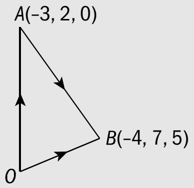
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\\ &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\end{aligned}$$

➔ Para hallar el **vector resultante** $\overrightarrow{AB}$ entre dos puntos A y B podemos restar el vector de posición de A del vector de posición de B.

Ejemplo 5

Los puntos A y B tienen coordenadas (–3, 2, 0) y (–4, 7, 5).
Halle el vector $\overrightarrow{AB}$.

Respuesta



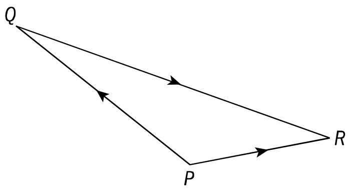
Primero escribimos los vectores de posición $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}-4\\7\\5\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}-4\\7\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\5\\5\end{pmatrix}$$

De manera similar, si conocemos el vector $\overrightarrow{PQ}$ y el vector $\overrightarrow{PR}$, conocemos la posición de cada uno de los puntos Q y R respecto del punto P.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{QR} &= \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}\\ &= \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}\end{aligned}$$

Ejemplo 6

Dados $\overrightarrow{XY} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{XZ} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -1 \end{pmatrix}$,

halle los vectores: **a** $\overrightarrow{YZ}$ **b** $\overrightarrow{ZY}$

Respuestas

a $\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ} - \overrightarrow{XY} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix}$

b $\overrightarrow{ZY} = -\begin{pmatrix} -2 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ejercitación 12C

1 P tiene coordenadas (7, 4), Q tiene coordenadas (2, 3).
Halle los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$.

2 El punto A tiene vector de posición $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, B tiene vector de posición $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y C tiene vector de posición $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Escriba como vector columna:

a $\overrightarrow{AB}$ **b** $\overrightarrow{BA}$ **c** $\overrightarrow{AC}$ **d** $\overrightarrow{CB}$

3 Escriba estos vectores en la forma $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$.
- **a** $\overrightarrow{OP}$, donde P es $(2, -3, 5)$
- **b** El vector que une $(1, -5, 6)$ con el origen
- **c** El vector que va desde $(2, -3, 5)$ hasta $(1, 2, -1)$
- **d** El vector que va desde $(1, 2, -1)$ hasta $(2, -3, 5)$

4 $\overrightarrow{LN} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{NM} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Halle $\overrightarrow{LM}$.

5 Dados $\overrightarrow{TS} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\overrightarrow{TU} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, halle $\overrightarrow{US}$.

6 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2x \\ -3 \\ z \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ x + y \end{pmatrix}$.
Halle los valores de las constantes x, y y z.

Los ejemplos siguientes ilustran cómo mostrar que tres puntos son **colineales**.

Los puntos son colineales si pertenecen a una misma recta.

Ejemplo 7

Muestre que los puntos A, B y C con vectores de posición $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $4\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, respectivamente, son colineales.

Respuesta

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= (-2 - 1)\mathbf{i} + (3 - (-2))\mathbf{j} + (-1 - 3)\mathbf{k}$

$= -3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

Comenzar por hallar el vector determinado por dos puntos cualesquiera, por ejemplo, $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

$= (4-1)\mathbf{i} + (-7 - (-2))\mathbf{j} + (7-3)\mathbf{k}$

$= 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

Ahora repetir el procedimiento usando otros dos puntos, por ejemplo, $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$

Por lo tanto, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son paralelos y dado que tienen un punto en común, A, los puntos A, B y C deben pertenecer a la misma recta.

Podríamos haber hallado $\overrightarrow{BC} = 6\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, que resulta ser un múltiplo escalar tanto de $\overrightarrow{AB}$ como de $\overrightarrow{AC}$, demostrando así que AB y AC son paralelos a BC.

Ejercitación 12D

1 Muestre que los puntos A, B y C con vectores de posición $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $4\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, respectivamente, son colineales.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

2 Los puntos A, B y C tienen coordenadas $(2, 3, -3)$, $(5, 1, 5)$ y $(8, -1, 13)$, respectivamente.

a Halle $\overrightarrow{AB}$.

b Muestre que A, B y C son colineales.

3 Muestre que los puntos $P_1(1, 2, 4)$, $P_2(-2, 1, 4)$ y $P_3(-5, 0, 4)$ son colineales.
Sabiendo que P_4 también es colineal con P_1, P_2 y P_3 y que la coordenada x de P_4 es 2, halle las coordenadas y y z.

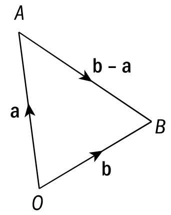
4 Los vectores de posición de A, B y C están dados por $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $x\mathbf{i}$, $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, respectivamente. Halle el valor de x tal que A, B y C sean colineales y halle la razón $AB : BC$.

Distancia entre dos puntos en tres dimensiones

➔ Si $A = (x_1, y_1, z_1)$, entonces $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$
y si $B = (x_2, y_2, z_2)$, entonces $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\\ &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= \mathbf{b} - \mathbf{a}\\ &= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Distancia $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$



Ejemplo 8

Halle el vector desde $A(1, 3, 4)$ hasta $B(4, 2, 7)$ y, a partir de lo anterior, determine la distancia entre los dos puntos.

Respuesta

$\overrightarrow{OA} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\overrightarrow{OB} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}) - (\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})\\ &= 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}\end{aligned}$$

Distancia $= |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{9+1+9} = \sqrt{19} = 4{,}36$ (3 cs)

Primero escribir los vectores de posición de cada punto

Ejercitación 12E

1 Halle el vector $\overrightarrow{AB}$ desde $A(-1, 5, 1)$ hasta $B(4, 5, -1)$ y, a partir de lo anterior, determine la distancia entre los dos puntos.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

2 El punto A tiene vector de posición $\begin{pmatrix}-5\\2\\4\end{pmatrix}$, B tiene vector de posición $\begin{pmatrix}6\\0\\6\end{pmatrix}$ y C tiene vector de posición $\begin{pmatrix}8\\10\\1\end{pmatrix}$.

Muestre que el triángulo ABC es isósceles y calcule el ángulo CAB.

3 Si el vector de posición $\mathbf{a}$ del punto $(2, -3, t)$ es tal que $|\mathbf{a}| = 7$, halle dos valores posibles de t.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

4 Sabiendo que $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $|\mathbf{a}| = 3x$, halle dos valores posibles de x.

5 $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}a\\-a\\2a\end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}2\\-4\\-2\end{pmatrix}$. Sabiendo que $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$, halle los posibles valores de a.

6 **a** y **b** son dos vectores y $|\mathbf{a}| = 5$. Halle el valor de $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ cuando:

a $\mathbf{b} = 2\mathbf{a}$

b $\mathbf{b} = -3\mathbf{a}$

c **b** es perpendicular a **a** y $|\mathbf{b}| = 12$

Vectores unitarios

Un **vector unitario** es un vector de longitud 1 en una dirección dada. Para hallar un vector unitario en la dirección de un vector **a**, primero debemos hallar la longitud del vector **a**, es decir, $|\mathbf{a}|$, y luego multiplicar el vector **a** por $\frac{1}{|\mathbf{a}|}$. Este vector tendrá la misma dirección, dado que es un múltiplo escalar de **a**, y tendrá longitud 1, dado que mide $\frac{1}{|\mathbf{a}|} \times$ la longitud del vector original.

➔ Para hallar un vector de longitud 1 en la dirección de **a** se usa la fórmula $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$.

Empleando este método podemos también hallar un vector de cualquier longitud, digamos de longitud *k*, en la dirección de **a**. Primero debemos hallar el vector unitario y luego multiplicarlo por este valor de *k*.

➔ Para hallar un vector de longitud *k* en la dirección de **a** se usa la fórmula $k\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$.

Ejemplo 9

a Halle el vector unitario en la dirección del vector $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

b Halle un vector de longitud 10 en la dirección del vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Respuestas

a El vector $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ tiene longitud $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Por lo tanto, un vector de longitud 1 será $\frac{1}{5}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$.

b El vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ tiene longitud $\sqrt{10}$. El vector $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ tiene longitud 1.

Por lo tanto, el vector de longitud 10 es $\frac{10}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$,

que puede simplificarse si se requiere:

$$\frac{10}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{10\sqrt{10}}{\sqrt{10}\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \sqrt{10}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ejercitación 12F

1 Muestre que $\frac{3}{5}\mathbf{i}+\frac{4}{5}\mathbf{j}$ es un vector unitario.

Muestre que la magnitud es 1.

2 Muestre que $\frac{1}{3}\mathbf{i}-\frac{2}{3}\mathbf{j}+\frac{2}{3}\mathbf{k}$ es un vector unitario.

3 Halle un vector unitario paralelo a $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

4 Halle un vector unitario paralelo al vector $\begin{pmatrix}-1\\-5\\4\end{pmatrix}$.

5 Halle un vector unitario en la dirección del vector determinado por los puntos $P_1(1,0,1)$ y $P_2\,(3,2,0)$.

6 $a\mathbf{i} + 2a\mathbf{j}$ es un vector unitario. Sabiendo que $a > 0$, halle el valor de a.

7 Halle un vector de magnitud 5 que resulte paralelo al vector $2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

8 Halle un vector de magnitud 7 en la dirección del vector $\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$.

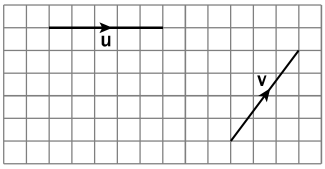
9 Halle un vector unitario en la dirección del vector:

a $\begin{pmatrix}2\cos\theta\\2\operatorname{sen}\theta\end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix}1\\\tan\alpha\end{pmatrix}$

12.2 Suma y diferencia de vectores

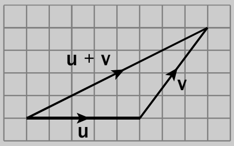
Suma de vectores

Supongamos que tenemos dos vectores $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

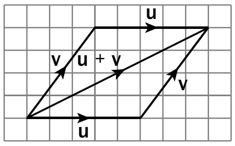


$\mathbf{u} + \mathbf{v}$ se interpreta geométricamente como un primer movimiento a lo largo del vector $\mathbf{u}$, seguido de un movimiento a lo largo del vector $\mathbf{v}$.

➔ El vector resultante, **u** + **v**, es el tercer lado del triángulo formado cuando **u** y **v** se disponen de forma tal que el origen de **v** coincide con el extremo de **u**.



Vemos también que la suma de vectores es conmutativa, dado que **u** + **v** = **v** + **u**. Esto da lugar al paralelogramo de la suma de vectores.



El vector resultante **u** + **v** en este caso es $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Observemos que es fácil obtener este resultado sumando las componentes correspondientes.

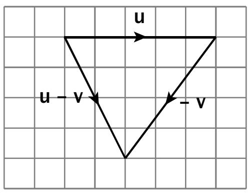
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+3 \\ 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

El término “conmutar” significa intercambiar o permutar.
En matemáticas, la propiedad conmutativa implica que se puede intercambiar el orden sin alterar el resultado.
Luego de considerar los siguientes cálculos (suma, diferencia, multiplicación y división), ¿cuáles operaciones parecerían ser conmutativas?
10 + 5 y 5 + 10
10 ÷ 5 y 5 ÷ 10
10 – 5 y 5 – 10
10 × 5 y 5 × 10

Diferencia de vectores

Consideremos nuevamente los dos vectores $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

u – **v** se interpreta geométricamente como un movimiento a lo largo del vector **u**, seguido de un movimiento a lo largo del opuesto del vector **v**, o **u** + (–**v**).



u – **v** = **u** + (–**v**)

El vector resultante es **u** – **v** y, en este caso específico, es $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Nuevamente, vemos que podemos calcular sencillamente este resultado, restando las componentes.

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

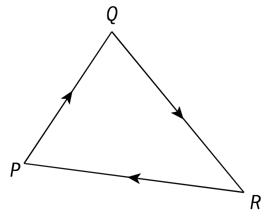
La resta no es conmutativa.
$\mathbf{v} - \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \mathbf{u} - \mathbf{v}$

➔ Los vectores se restan sumando el vector opuesto.

El vector nulo

Considere el triángulo *PQR*.

$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP}$ debe ser igual a cero ya que el recorrido total resulta en una vuelta al punto de partida. Esto se escribe como $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \mathbf{0}$



El vector nulo se escribe en negrita para indicar que es un vector.

$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en dos dimensiones y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en tres dimensiones.

Equilibrio es el nombre que se da al estado donde un número de fuerzas están balanceadas: su resultante es cero. El concepto de equilibro es un tema interesante para explorar con mayor profundidad.

Ejemplo 10

Dados $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, halle los vectores:

a $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ **b** $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ **c** $2\mathbf{b} - 3\mathbf{a}$

Respuestas

a $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (2 + 4)\mathbf{i} + (-3 + (-2))\mathbf{j} + (3 + (-1))\mathbf{k}$
$= 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

b $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (4 - 2)\mathbf{i} + (-2 - (-3))\mathbf{j} + (-1 - 3)\mathbf{k}$
$= 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

c $2\mathbf{b} - 3\mathbf{a} = (2(4) - 3(2))\mathbf{i} + (2(-2) - 3(-3))\mathbf{j} + (2(-1) - 3(3))\mathbf{k}$
$= 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$

Ejercitación 12G

1 Dados $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{d} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, halle estos vectores:

a $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ **b** $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ **c** $\mathbf{c} + \mathbf{d}$
d $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d}$ **e** $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ **f** $\mathbf{d} - \mathbf{b} + \mathbf{a}$

2 Dados $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$, halle estos vectores:

a $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ **b** $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ **c** $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c})$
d $\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}$ **e** $3\mathbf{c} - 2\mathbf{b} + 5\mathbf{a}$

3 Dados $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - \mathbf{k}$, halle estos vectores:

a $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ **b** $\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$

c $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ **d** $4(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + 2(\mathbf{b} + \mathbf{c})$

4 Dados los vectores $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ y $\mathbf{q} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, halle los vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$, donde:

a $2\mathbf{x} - 3\mathbf{p} = \mathbf{q}$ **b** $4\mathbf{p} - 3\mathbf{y} = 7\mathbf{q}$ **c** $2\mathbf{p} + \mathbf{z} = \mathbf{0}$

5 Los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son tales que $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6-y \\ -2x-3 \end{pmatrix}$.

Sabiendo que $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, halle los valores de x e y.

6 Los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son tales que $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ u \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} t-s \\ 3s \\ t+s \end{pmatrix}$.

Sabiendo que $3\mathbf{a} = 2\mathbf{b}$, calcule los valores de s, t y u.

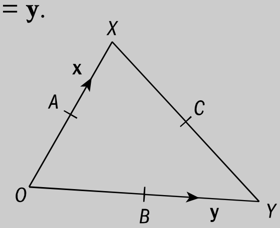
El método que consiste en calcular la acción combinada de dos o más fuerzas mediante la suma se denomina regla del paralelogramo y se ha conocido desde la época del filósofo y erudito griego Aristóteles (384–322 a. C.). El matemático holandés Simon Stevin (1548–1620) la empleó en su tratado *Principios del arte del peso* que permitió grandes avances en el desarrollo de la mecánica. No fue sino hasta alrededor de 1800 que Caspar Wessel (danés-noruego, 1745–1818) y Jean-Robert Argand (suizo, 1768–1822) comenzaron a formalizar el concepto de “vector”.

Demostraciones geométricas

Aun cuando no contemos con vectores específicos, se pueden utilizar sumas, diferencias y múltiplos de vectores para deducir algunos resultados geométricos.

Ejemplo 11

En el triángulo OXY, A, B y C son los puntos medios de OX, OY y XY respectivamente, $\overrightarrow{OX} = \mathbf{x}$ y $\overrightarrow{OY} = \mathbf{y}$.



a Halle expresiones para $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{XY}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{CO}$ en función de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

b Halle una expresión para $\overrightarrow{AB}$ en función de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. ¿Cuál es la relación entre la recta XY y la recta AB?

c P es el punto tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OX} + \frac{2}{3}\overrightarrow{XB}$. Halle $\overrightarrow{OP}$.

d ¿Qué puede concluir acerca de la posición de P?

Respuestas

a $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OX} = \frac{1}{2}\mathbf{x}$

$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OY} = \frac{1}{2}\mathbf{y}$

Usar la información del diagrama

$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OY} = -\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$

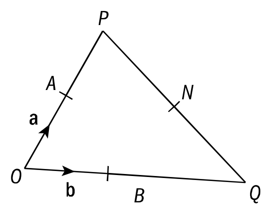
Usar suma de vectores

▶ Continúa en la página siguiente.

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XC} = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\overrightarrow{XY}$ $= \mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ $= \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{x}$ $= \frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ $\overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$	*Usar suma de vectores* *Del diagrama,* $\overrightarrow{XC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{XY}.$
b $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}$ $= \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ Como $\overrightarrow{XY} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ y $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$, la longitud de *AB* es la mitad de la de *XY* y ambos vectores tienen la misma dirección. Por lo tanto, las rectas son paralelas.	$\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$
c $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OX} + \frac{2}{3}\overrightarrow{XB}$ $= \mathbf{x} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OB})$ $= \mathbf{x} + \frac{2}{3}(-\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y})$ $= \frac{1}{3}\mathbf{x} + \frac{1}{3}\mathbf{y}$ $= \frac{1}{3}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ Por lo tanto, $OP : OC = 2 : 3$.	*Usar suma de vectores* $\overrightarrow{XO} = -\overrightarrow{OX}$
d *P* se encuentra a $\frac{2}{3}$ del camino entre O y C.	

Ejercitación 12H

1 En este triángulo, $OA = AP$, $BQ = 3OB$, N es el punto medio de PQ y $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$.



Muestre que:

a $\overrightarrow{AP} = \mathbf{a}$ **b** $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$

c $\overrightarrow{PQ} = 4\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$ **d** $\overrightarrow{PN} = 2\mathbf{b} - \mathbf{a}$

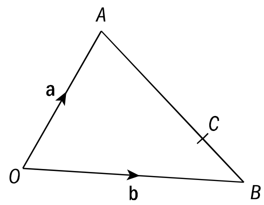
e $\overrightarrow{ON} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ **f** $\overrightarrow{AN} = 2\mathbf{b}$

2 En este triángulo, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ y $AC : CB = 3:1$.

Muestre que:

a $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ **b** $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$

c $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{4}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ **d** $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\mathbf{a} + \frac{4}{4}\mathbf{b}$

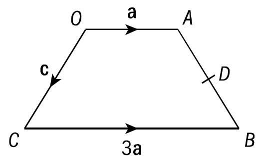


3 $OABC$ es un trapecio. $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ y $\overrightarrow{CB} = 3\mathbf{a}$. D es el punto medio de AB.

Muestre que:

a $\overrightarrow{OB} = \mathbf{c} + 3\mathbf{a}$ **b** $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c} + 2\mathbf{a}$

c $\overrightarrow{OD} = 2\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$ **d** $\overrightarrow{OC} = 2\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{c}$



4 $ABCDEF$ es un hexágono regular con centro en O. $\overrightarrow{FA} = \mathbf{a}$ y $\overrightarrow{FB} = \mathbf{b}$.

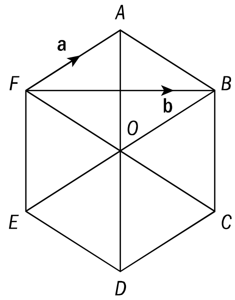
a Exprese cada uno de estos vectores en función de **a** y/o **b**.

i $\overrightarrow{AB}$ **ii** $\overrightarrow{FO}$ **iii** $\overrightarrow{FC}$

iv $\overrightarrow{BC}$ **v** $\overrightarrow{FD}$

b ¿Qué cuestiones geométricas puede deducir sobre los segmentos AB y FC?

c Usando vectores, determine si (FD) y (AC) son paralelas.



5 En el diagrama $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ y $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. M es el punto medio de OA y P pertenece a AB de modo tal que $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

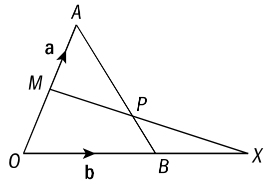
Muestre que:

a $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ y $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

b $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\mathbf{a}$ y $\overrightarrow{MP} = \frac{2}{3}\mathbf{b} - \frac{1}{6}\mathbf{a}$.

c Si X es un punto tal que $OB = BX$, muestre que $\overrightarrow{MX} = 2\mathbf{b} - \mathbf{a}$.

d Demuestre que MPX es una recta.



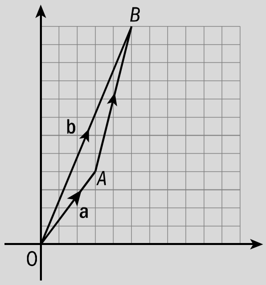
12.3 Producto escalar

A menudo, necesitamos calcular el ángulo entre dos vectores cuando resolvemos problemas.

Investigación: el teorema del coseno

Considere dos vectores $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

y $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$.



Ahora va a usar el teorema del coseno para calcular θ, el ángulo entre los dos vectores.

1 Halle el vector $\overrightarrow{AB}$.

2 Halle las longitudes OA, OB y AB ($|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$ y $|\overrightarrow{AB}|$).

3 Recuerde el teorema del coseno y aplíquelo a esta situación.

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2}{2\,|\overrightarrow{OA}| \times |\overrightarrow{OB}|}$$

4 Halle θ, calculando $\cos^{-1}\left(\dfrac{|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2}{2\,|\overrightarrow{OA}| \times |\overrightarrow{OB}|}\right)$.

Debería hallar que $\theta = 14{,}3°$.

Ahora repita este procedimiento usando $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$.

En el paso **3**, es posible simplificar la expresión obtenida, para llegar a

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$$

o, alternativamente, $a_1b_1 + a_2b_2 = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$.

$a_1b_1 + a_2b_2$, se llama el **producto escalar** de los dos vectores $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$.

El producto escalar se conoce también como producto punto.

Se lo puede hallar multiplicando los coeficientes de **i** y los coeficientes de **j** y (en el caso de tres dimensiones) los coeficientes de **k** y sumando los resultados.

→ **Producto escalar**
Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$, entonces $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.
De forma similar, si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

El producto escalar es conmutativo; esto significa que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$.

➔ El producto escalar $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre los dos vectores.

Ejemplo 12

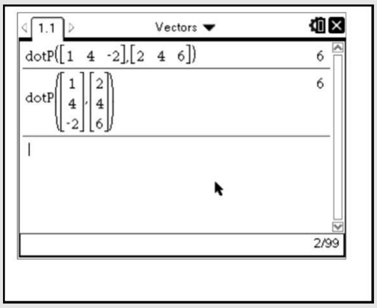
Si $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, halle $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

Respuesta

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (1\times 2) + (4\times 4) + (-2\times 6)$

$= 2 + 16 - 12 = 6$

El resultado es un número escalar, no un vector.



También se puede usar la calculadora de pantalla gráfica (CPG) para calcular el producto escalar entre dos vectores.

El ángulo entre dos vectores

Si no conocemos el valor del ángulo θ entre dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, podemos usar

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta \text{ o } \cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

para hallar θ, en lugar de desarrollar por completo el teorema del coseno.

Ejemplo 13

Halle el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, sabiendo que $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$.

Respuesta

Usando $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta$,

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3\times 5 + 4\times 12 = 63$

$|\mathbf{a}| = 5,\ |\mathbf{b}| = 13$

$|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|\ \cos\theta = 5\times 13\times\cos\theta$

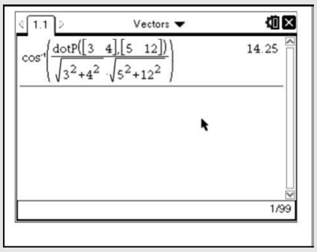
$= 65\cos\theta$

$\Rightarrow 63 = 65\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{63}{65}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{63}{65}\right)$

$= 14{,}3°$



Propiedades especiales del producto escalar

Vectores perpendiculares

Dos vectores son perpendiculares si y solo si su producto escalar es cero.
Esto es porque si $\theta = 90°$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\cos 90° \\ &= |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \times 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

➔ Para vectores **perpendiculares**, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$

A los vectores perpendiculares también se los llama ortogonales.

Observe que, dado que **i**, **j** y **k** son perpendiculares entre sí, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = 0$.

Vectores paralelos

Si dos vectores **a** y **b** son paralelos, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\cos 0° \\ &= |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\end{aligned}$$

➔ Para vectores **paralelos**, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\;|\mathbf{b}|$

Dado que **i** y **j** y **k** son todos vectores unitarios, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$.

Vectores coincidentes

Dado un vector **a**

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} &= |\mathbf{a}|\,|\mathbf{a}|\,\cos 0° \\ &= a^2\end{aligned}$$

➔ Para vectores **coincidentes**, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^2$

En 1686 Newton publicó su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, en la cual detalló tres **leyes del movimiento**. Para poder comprender y aplicar estas leyes necesitamos saber cómo descomponer una fuerza en direcciones perpendiculares y cómo hallar la resultante de fuerzas perpendiculares. Las leyes de Newton son un tema interesante para explorar con mayor profundidad.

Ejercitación 12I

1 Dados $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ y $\mathbf{c} = -5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, halle:

- **a** $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$
- **b** $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$
- **c** $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$
- **d** $\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})$
- **e** $(\mathbf{c}+\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$

2 Dados $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}4\\-3\\-1\end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-6\end{pmatrix}$, halle:

- **a** $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$
- **b** $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{w})$
- **c** $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$
- **d** $2\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$
- **e** $(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{w})$

3 Determine si estos pares de vectores son perpendiculares, paralelos o ninguna de las dos opciones.

a $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

b $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

d $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

e $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{OZ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

f $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ y $\mathbf{m} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

g $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4 Halle $(\mathbf{a} + 3\mathbf{b})\cdot(2\mathbf{a} - \mathbf{b})$ si $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

5 Dados $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ y $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, halle el vector $\mathbf{d}$ tal que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{d} = -9$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{d} = 11$ y $\mathbf{c}\cdot\mathbf{d} = 6$.

6 Halle el ángulo entre los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ si $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{b}| = 2$ y $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \sqrt{6}$.

7 Halle los ángulos entre estos vectores, dando sus respuestas en grados, con una aproximación de una cifra decimal.

a $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

c $2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ y $2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

8 Considere los puntos $A(2,4)$, $B(1,9)$ y $C(3,2)$. Halle:

a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

b $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

c El coseno del ángulo entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

9 Halle el ángulo entre los siguientes pares de vectores.

a $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

c $2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

PREGUNTA TIPO EXAMEN

10 Los puntos *A*, *B* y *C* forman un triángulo. Sus vectores de posición son $\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ respectivamente. Halle:

a Las longitudes de los lados *AB* y *AC*

b El valor exacto del coseno del ángulo *BAC*

c El área del triángulo

11 Halle el ángulo entre $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ y el eje x.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

12 Los vectores de posición de *A* y *B* son $4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, respectivamente, respecto de un origen *O*.

a Muestre que *OA* y *OB* son perpendiculares.

b Halle la longitud *AB.*

13 Halle λ si los vectores $2\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ son perpendiculares.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

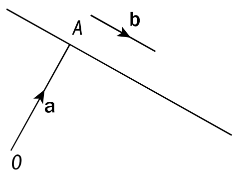
14 Sean $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$. Halle λ tal que $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ sea perpendicular a $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

15 Sean $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}p\\2\\-p\end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}2\\-p\\-3\end{pmatrix}$.

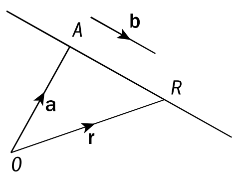
Halle el valor de p tal que $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ sean perpendiculares.

12.4 Ecuación vectorial de la recta

Supongamos que una recta pasa por el punto *A*, donde *A* tiene vector de posición **a**, y que la recta es paralela al vector **b**.



Ahora, si *R* es cualquier punto que pertenece a la recta, $\overrightarrow{AR}$ es paralelo a **b**. Por lo tanto, debe existir un número t tal que $\overrightarrow{AR} = t\mathbf{b}$.



Cualquier punto *R* que pertenece a la recta puede hallarse partiendo del origen y desplazándose por el vector **a** hasta alcanzar la recta.
A partir de lo anterior,

$\mathbf{r} = \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AR} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$.

➔ La **ecuación vectorial** de la recta está dada por $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$, donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición general de un punto que pertenece a la recta, $\mathbf{a}$ es el vector de posición de un punto de la recta y $\mathbf{b}$ es un **vector director** paralelo a la recta. A t se le llama parámetro.

Ejemplo 14

a Halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $(1, -1, 3)$ y es paralela al vector $-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

b Halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $A(1, 0, -4)$ y $B(-2, 1, 1)$.

c Halle el ángulo agudo entre estas dos rectas.

Respuestas

a $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

Una ecuación vectorial es

$\mathbf{r} = (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + t(-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k})$

b $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Escribir los vectores de posición de A y B

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ es un vector que tiene la misma dirección que la recta.

A partir de lo anterior, una ecuación de la recta es

$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

c Los vectores directores son $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Para hallar el ángulo entre estas dos rectas, hay que hallar el ángulo entre sus vectores directores.

En la ecuación $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}$ es el vector director.

Usando $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta$

$-1 \times -3 + 3 \times 1 + -1 \times 5$

$= \sqrt{11} \times \sqrt{35} \cos\theta$

$1 = \sqrt{11}\sqrt{35} \cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{11}\sqrt{35}}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{11}\sqrt{35}}\right)$

$= 87{,}1°$

Ejercitación 12J

1 Halle una ecuación de la recta que es paralela al vector **a** y que pasa por el punto B, con vector de posición **b**:

a $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

d $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ $\mathbf{b} = 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

2 Halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos dados.

a $(4, 5)$ y $(3, -2)$ **b** $(4, -2)$ y $(5, -2)$

c $(3, 5, 2)$ y $(2, -4, 5)$ **d** $(0, 0, 1)$ y $(1, -1, 0)$

3 Halle una ecuación vectorial de una recta perpendicular al vector **a** y que pasa por el punto B con vector de posición **b**.

a $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

b $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ $\mathbf{b} = 5\mathbf{k}$

4 Determine si el punto dado pertenece a la recta dada.

a $(4, 5)$ $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b $(5, -2)$ $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

c $(-3, 5, 1)$ $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

d $(2, 1, 1)$ $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k} + t(-2\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$

5 Halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $(2, 4, 5)$ en la dirección $-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$.
Halle p y q tales que el punto $(p, 10, q)$ pertenezca a la recta.

6 Halle una ecuación vectorial de una recta vertical que pase por el punto (–6, 5).

7 ¿Son las rectas representadas por estas ecuaciones vectoriales coincidentes, paralelas o perpendiculares, o ninguna de estas opciones?

a $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 10 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

b $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

d $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

8 Halle el ángulo entre estos pares de rectas.

a $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b $\mathbf{r} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

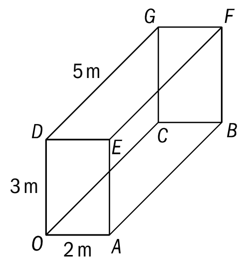
PREGUNTAS TIPO EXAMEN

9 Los puntos A y B tienen coordenadas (–2, –3, –4) y (–6, –7, –2), respectivamente. La recta l_1 tiene ecuación $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a Muestre que el punto A pertenece a la recta l_1.

b Muestre que $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular a la recta l_1.

10 La figura muestra un prisma en el cual $OA = 2$ m, $OC = 5$ m y $OD = 3$ m. Considere O como el origen y vectores unitarios **i**, **j** y **k** en la dirección OA, OC y OD respectivamente.



a Exprese estos vectores en función de los vectores unitarios.

i $\overrightarrow{OF}$ **ii** $\overrightarrow{AG}$

b Calcule el valor de:

i $|\overrightarrow{OF}|$ **ii** $|\overrightarrow{AG}|$

iii Halle el producto escalar de $\overrightarrow{OF}$ y $\overrightarrow{AG}$.

c A partir de lo anterior, halle el ángulo entre las diagonales OF y AG.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

11 Los puntos A y B tienen vectores de posición $\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $8\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, respectivamente, respecto de un origen fijo O.

a Halle el vector $\overrightarrow{AB}$.

b Halle el coseno del ángulo OAB.

c Muestre que, para todos los valores de μ, el punto P con vector de posición $(1 + 7\mu)\mathbf{i} + (5 - 8\mu)\mathbf{j} + (-2 + 8\mu)\mathbf{k}$ pertenece a la recta que pasa por A y B.

d Halle el valor de μ para el cual OP resulta perpendicular a AB.

e A partir de lo anterior, halle el punto en el que la perpendicular desde O hasta AB corta a AB.

Punto de intersección entre dos rectas

Si nos dan las ecuaciones vectoriales de dos rectas, podemos hallar el punto donde se cortan.

Ejemplo 15

Dos rectas tienen ecuaciones $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Muestre que las rectas se cortan y halle las coordenadas del punto de intersección.

Respuesta

Los dos vectores son iguales si sus correspondientes componentes son iguales.

r_1 y r_2 se cortan si existe un valor de t y un valor de s tales que $r_1 = r_2$.

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 3 + s \\ y = s \\ z = -1 + s \end{matrix}$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 6 \\ y = 2 + 4t \\ z = 8t \end{matrix}$$

$3 + s = 6$ (1)

$s = 2 + 4t$ (2)

$-1 + s = 8t$ (3)

Igualar componentes y resolver el sistema de ecuaciones

La ecuación (1) da $s = 3$

Sustituyendo $s = 3$ en la ecuación (2):

$3 = 2 + 4t$ por lo tanto $t = \frac{1}{4}$

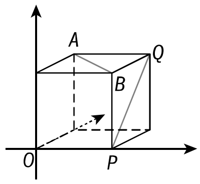
Sustituyendo $s = 3$ en la ecuación (3)

$-1 + 3 = 8t$ por lo tanto $t = \frac{1}{4}$

Dado que el valor de s y el valor de t satisfacen las tres ecuaciones, las dos rectas se deben cortar.

En tres dimensiones, dos rectas pueden:

1. **Cortarse:** si el valor de los parámetros satisface todas las ecuaciones.
2. **Ser paralelas:** tendrán vectores directores que son múltiplos uno del otro.
3. **Ser alabeadas:** si las rectas no son paralelas y los valores no son consistentes, las rectas no se cortan.



AB y PQ son alabeadas, nunca se cortan.

▶ Continúa en la página siguiente.

Sustituyendo $s = 3$ en $\mathbf{r}_1$: $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $x = 3 + 3 = 6$ $y = 0 + 3 = 3$ $z = -1 + 3 = 2$ Por lo tanto, las coordenadas del punto de intersección son (6,3,2).	*Para hallar el punto de intersección, reemplazar el valor de s en $\mathbf{r}_1$ para hallar el vector de posición del punto de intersección*
$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ $x = 6$ $y = 2 + 4\left(\frac{1}{4}\right) = 3$ $z = 0 + 8\left(\frac{1}{4}\right) = 2$	*Alternativamente podríamos reemplazar el valor de t en $\mathbf{r}_2$.* *Esto nos da las mismas coordenadas y es una manera útil de verificar la respuesta.*

Ejercitación 12K

1 Halle las coordenadas del punto donde $\mathbf{r}_1 = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \lambda(2\mathbf{i} - 4\mathbf{j})$ corta a $\mathbf{r}_2 = 11\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + \mu(\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$.

2 Las ecuaciones vectoriales de dos rectas están dadas por

$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$. Las rectas se cortan en el punto P. Halle el vector de posición del punto P.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

3 Una ecuación de la recta l_1 es:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Una ecuación de la recta l_2 es:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Muestre que las rectas l_1 y l_2 se cortan y halle las coordenadas del punto de intersección.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

4 Halle el punto donde las rectas con ecuaciones $\mathbf{r}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t(3\mathbf{i} - \mathbf{j})$ y $\mathbf{r}_2 = -\mathbf{i} + s\mathbf{j}$ se cortan.

5 Muestre que las dos rectas $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y

$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son alabeadas.

6 Las ecuaciones vectoriales de las rectas L y M son:
L: $\mathbf{l} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k} + s(-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$

M: $\mathbf{m} = 14\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 6\mathbf{k} + t(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$

a Muestre que las rectas L y M se cortan y halle el vector de posición del punto de intersección.

b Muestre que las rectas L y M son perpendiculares.

7 La ecuación de la recta L es $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

El punto A tiene coordenadas $(5, 7, a)$, donde a es una constante.

El punto B tiene coordenadas $(b, 13, -1)$, donde b es una constante.

Los puntos A y B pertenecen a la recta L.

a Halle los valores de a y b.

El punto P pertenece a la recta L de modo tal que OP es perpendicular a L.

b Halle las coordenadas de P.

c A partir de lo anterior, halle la distancia exacta OP.

8 Los puntos A y B tienen vectores de posición $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, respectivamente, respecto de un origen fijo O.

a Determine una ecuación vectorial de la recta L_1 que pase por los puntos A y B.

Una ecuación vectorial de la recta L_2 es $\mathbf{r} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{k} + s(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$.

b Muestre que las rectas L_1 y L_2 se cortan y halle el vector de posición del punto de intersección C.

c Halle la longitud del segmento AC.

d Halle, a la décima de grado más próxima, el ángulo agudo entre las rectas L_1 y L_2.

Material de ampliación disponible en línea: *Hoja de ejercicios 12: La ecuación de una recta en tres dimensiones*

12.5 Aplicaciones de los vectores

Los vectores se aplican a situaciones de la vida cotidiana que contemplan cantidades vectoriales tales como los desplazamientos y las velocidades.

Ejemplo 16

El vector de posición de un bote, A, t horas después de dejar el puerto está dado por $\mathbf{r}_1 = t\begin{pmatrix}30\\15\end{pmatrix}$. Un segundo bote, B, pasa cerca del puerto. Su vector de posición en un tiempo t está dado por $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix}50\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$.

a ¿Qué distancia hay entre los botes en el momento en que el primero deja el puerto?

b ¿Qué celeridad tiene cada bote?

c ¿Existe peligro de que los botes colisionen si uno de ellos no cambia de dirección?

Respuestas

a En $t = 0$, el bote A está en el origen, con vector de posición $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ y el bote B tiene vector de posición $\begin{pmatrix}50\\5\end{pmatrix}$, por lo tanto, la distancia que los separa es de $\sqrt{50^2+5^5} = \sqrt{2525} = 50{,}2\,\text{km}$.

b La celeridad de los botes se halla calculando la magnitud de sus vectores directores, esto es, del vector velocidad de cada bote.

Para el bote A, el vector que recorrerá en una hora es $\begin{pmatrix}30\\15\end{pmatrix}$, cuya longitud es $\sqrt{30^2+15^2} = \sqrt{1125} = 33{,}5\,\text{km}$.

Por lo tanto, el bote A tiene una celeridad de $33{,}5\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$.

Para el bote B, el vector que recorrerá en una hora es $\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$, cuya longitud es $\sqrt{10^2+10^2} = \sqrt{200} = 14{,}1\,\text{km}$.

Por lo tanto, el vector B tiene una celeridad de $14{,}1\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$.

c Para que los botes colisionen debería existir un valor de t para el cual los vectores de posición de los dos botes coincidieran.

Componentes de x: $30t = 50 + 10t \Rightarrow t = 2{,}5\,\text{h}$

Componentes de y: $15t = 5 + 10t \Rightarrow t = 1\,\text{h}$

En consecuencia, los botes no colisionarán.

Ejercitación 12L

1 El vector de posición del barco S es 30 km Norte y 60 km Este. El vector de posición de la boya B es 20 km Norte y 45 km Este. Halle:

a La posición del barco respecto de la boya

b La distancia exacta entre el barco y la boya

2 Una partícula P está en el origen O en el instante $t = 0$. La partícula se mueve con una velocidad constante y llega al punto Q, con vector de posición $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -8 \end{pmatrix}$ m, 4 segundos más tarde. Halle:

a La velocidad de P

b La posición de P, si continúa moviéndose durante 6 segundos más

Otra partícula T se mueve con una velocidad constante de $(12\mathbf{i} - 5\mathbf{j})\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Pasa por el punto A, cuyo vector de posición es $(4\mathbf{i} - \mathbf{j})$ m cuando $t = 0$.

c Halle la celeridad de la partícula.

d Halle la distancia de T a O, cuando $t = 3$ s.

e ¿Colisionarán las partículas?

3 En esta pregunta las distancias están dadas en kilómetros y el tiempo en horas. Un vector unitario representa un desplazamiento de 1 km. A las 3 de la tarde una persona está parada en lo alto de un peñasco mirando el mar y observando el paso de dos barcos. La posición del barco A respecto de un punto en la costa está dada por $3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y viaja con una velocidad de $4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. La posición del barco B está dada por $4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y viaja a una velocidad de $3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Halle:

a El instante en el cual los dos barcos colisionarán si alguno de los dos no cambia de dirección

b El punto en el cual los dos barcos colisionarán

PREGUNTA TIPO EXAMEN

4 Las posiciones de dos helicópteros X e Y en el instante t están dadas por las fórmulas

$\mathbf{r}_x = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{r}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ respectivamente.

Las distancias están dadas en metros.

a Halle la celeridad de los dos helicópteros.

b Muestre que los dos helicópteros no colisionarán.

c Halle la distancia entre los helicópteros cuando $t = 10$.

Ejercicio de revisión

1 Demuestre, usando un método vectorial, que los puntos $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 3, 5)$ y $C(7, 0, -1)$ son colineales.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

2 Muestre que los puntos A, B y C, con vectores de posición $5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $-3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ respectivamente, forman un triángulo rectángulo.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

3 Dados $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, muestre que los vectores

$\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ son perpendiculares.

4 Dos rectas con ecuaciones $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ se cortan en el punto P. Halle las coordenadas de P.

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

5 Un triángulo tiene sus vértices en $A(-2, 4)$, $B(1, 7)$ y $C(-3, 2)$.

a Halle $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

b Halle $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

c Muestre que $\cos B\hat{A}C = \dfrac{3}{\sqrt{2}\sqrt{5}}$.

6 Dos rectas L_1 y L_2 están dadas por $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix}$.

a P es el punto de L_1 cuando $s = 4$. Halle el vector de posición de P.

b Muestre que P pertenece también a L_2.

7 La recta L_1 tiene ecuación vectorial $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

L_2 es paralela a L_1 y pasa por el punto B(2, 2, 4).

a Escriba una ecuación vectorial para L_2 en la forma $\mathbf{r} = \mathbf{a} + s\mathbf{b}$.

Una tercera recta L_3 es perpendicular a L_1 y está representada por

$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 7 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$.

b Muestre que $x = -3$.

c Halle las coordenadas del punto C, la intersección entre L_1 y L_3.

d Halle $\overrightarrow{BC}$.

e Halle $|\overrightarrow{BC}|$ en la forma $a\sqrt{b}$, donde a y b son enteros que deberá determinar.

PREGUNTA TIPO EXAMEN

8 (En esta pregunta las distancias se miden en kilómetros y el tiempo en horas.) Al mediodía, el cuidador de un faro observa dos barcos A y B.

La posición del barco A en el instante *t* está dada por $r_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \end{pmatrix}$.

La posición del barco B en el instante *t* está dada por $r_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a Muestre que A y B colisionarán y halle el instante y el vector de posición del punto de colisión. A fin de evitar la colisión, a las 12.15, el barco A cambia su dirección a $\begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix}$.

b Halle la distancia entre A y B a las 12.30.

Ejercicio de revisión

1 Halle la amplitud del ángulo entre los vectores $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Dé su respuesta al grado más próximo.

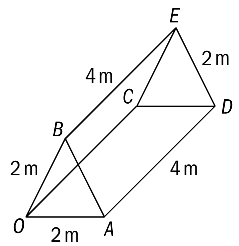
PREGUNTAS TIPO EXAMEN

2 Los vértices de un triángulo *PQR* se definen por los vectores de posición

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Halle:

a $\overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{QP}$ **b** $P\hat{Q}R$ **c** El área del triángulo *PQR*

3 Una carpa *OABCDE* tiene forma de prisma triangular, con una sección transversal constante que es un triángulo equilátero de 2 m de lado. La carpa tiene 4 m de largo. La base *OADC* es horizontal. Los postes de soporte se colocarán a lo largo de las diagonales *BC* y *BD*.



Tome *O* como el origen y considere vectores unitarios **i** y **j** en la dirección de *OA* y *OC* respectivamente; **k** es un vector unitario en sentido vertical hacia arriba.

a Exprese estos vectores en función de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**.
i $\overrightarrow{OC}$ **ii** $\overrightarrow{OB}$ **iii** $\overrightarrow{OD}$

b A partir de lo anterior, halle los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BD}$.

c Calcule los valores de:
i $|\overrightarrow{BC}|$ **ii** $|\overrightarrow{BD}|$
iii El producto escalar entre $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BD}$

d A partir de lo anterior, halle el ángulo entre los dos postes de soporte.

4 Dados $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + (x-2)\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = x^2\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} - 12x\mathbf{k}$, donde x es una variable escalar, halle:

a Los valores de x para los cuales **a** y **b** son perpendiculares

b El ángulo entre **a** y **b**, cuando $x = -1$

PREGUNTAS TIPO EXAMEN

5 Los puntos P y Q tienen vectores de posición $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ respectivamente, respecto de un origen O.

a Muestre que $\overrightarrow{OP}$ es perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$.

b Escriba una ecuación vectorial de la recta L_1, que pasa por los puntos P y Q.

Una ecuación de la recta L_2 es $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

c Muestre que las rectas L_1 y L_2 se cortan y halle el vector de posición del punto de intersección.

d Calcule, al grado más próximo, el ángulo agudo entre las rectas L_1 y L_2.

6 (Todas las distancias en esta pregunta están en metros y el tiempo en segundos.) Un insecto vuela a una altura constante. En el instante $t = 0$, el insecto está en el punto A, con coordenadas (0, 0, 6). Dos segundos más tarde, el insecto está en el punto B, con coordenadas (6, –2, 6).

a Halle el vector $\overrightarrow{AB}$.

El insecto continúa volando en la misma dirección con la misma celeridad.

b Muestre que el vector de posición del insecto en el tiempo t está dado por $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En el instante $t = 0$, un pájaro emprende vuelo desde el suelo. El vector de posición del pájaro en el tiempo t está dado por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c Escriba las coordenadas del punto de partida del pájaro.

d Halle la celeridad del pájaro.

El pájaro alcanza al insecto en el punto C.

e Halle el tiempo que tarda el pájaro en alcanzar al insecto.

f Halle las coordenadas de C.

RESUMEN DEL CAPÍTULO 12

Vectores: conceptos básicos

- Un **vector** es una cantidad que tiene **medida** (magnitud) y **dirección**.
  El desplazamiento y la velocidad son ejemplos de vectores.
- Un **escalar** es una cantidad que tiene medida pero no dirección.
  La distancia y la celeridad son ejemplos de escalares.
- El vector unitario en la dirección del eje x es $\mathbf{i}$.

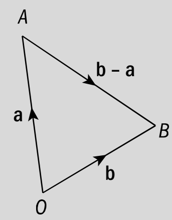
  En dos dimensiones, $\mathbf{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y en tres dimensiones, $\mathbf{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.
- El vector unitario en la dirección del eje y es $\mathbf{j}$.

  En dos dimensiones, $\mathbf{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ y en tres dimensiones, $\mathbf{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.
- En tres dimensiones, el vector unitario en la dirección del eje z es $\mathbf{k}$, donde
  $\mathbf{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.
- Los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ se denominan **vectores base**.
- Si $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$, entonces $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{a^2+b^2}$.

  Si $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$, entonces $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
- Dos vectores son **iguales** si tienen igual magnitud y dirección; sus componentes $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ también son iguales y, por lo tanto, sus vectores columna son iguales.
- Podemos escribir el vector $\overrightarrow{AB}$ como $-\overrightarrow{BA}$.
- Dos vectores son **paralelos** si uno es un múltiplo escalar del otro.
  Por lo tanto, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{RS}$ son paralelos si $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{RS}$ donde k es una cantidad escalar.
  Esto puede escribirse como $\mathbf{a}=k\mathbf{b}$.
- El punto con coordenadas (x, y) tiene **vector de posición** $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$.
- Para calcular el **vector resultante** $\overrightarrow{AB}$ entre dos puntos A y B, se resta el vector de posición de A del vector de posición de B.

Continúa en la página siguiente.

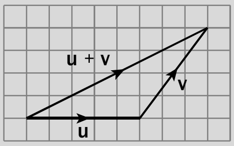
- Si $A = (x_1, y_1, z_1)$, entonces $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$
  y si $B = (x_2, y_2, z_2)$, entonces $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$.
  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$
  $= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
  $= \mathbf{b} - \mathbf{a}$
  $= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$
  Distancia $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$



- Para hallar un vector de longitud 1 en la dirección de **a**, se usa la fórmula $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$.
- Para hallar un vector de longitud k en la dirección de a, se usa la fórmula $k\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$.

Suma y diferencia de vectores

- El vector resultante, **u + v**, es el tercer lado de un triángulo formado cuando **u** y **v** se ubican uno a continuación de otro haciendo coincidir el extremo de **u** con el origen de **v**.



- Para hallar la diferencia entre dos vectores, se suma el vector opuesto.

Producto escalar

- **Producto escalar**
  Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$, entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.
  De manera similar, si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$,
  entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.
- El **producto escalar** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores.
- Para vectores **perpendiculares**, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.
- Para vectores **paralelos**, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$.
- Para vectores **coincidentes**, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$.

Ecuación vectorial de la recta

- La **ecuación vectorial** de la recta es $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$, donde **r** es el vector de posición general de un punto de la recta, **a** es un vector de posición de un punto dado y **b** es un **vector director** paralelo a la recta. t se denomina parámetro.

¿Unidos o separados?

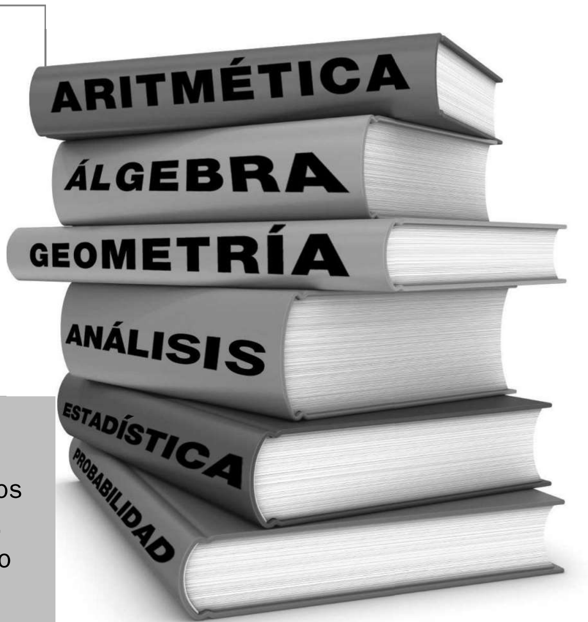
A menudo se divide a las matemáticas en diferentes ramas o campos de conocimiento.

- Enumere las ramas de las matemáticas que conoce.
- ¿Por qué los seres humanos sienten la necesidad de categorizar y compartimentar el conocimiento?

Álgebra y geometría

En este capítulo representamos vectores geométricamente y los usamos para demostrar propiedades geométricas. También empleamos el álgebra vectorial para describir y generalizar propiedades geométricas.

- ¿Puede pensar ejemplos de cómo usó los vectores en cada una de estas formas?
- Entonces, ¿los vectores pertenecen al álgebra o a la geometría?

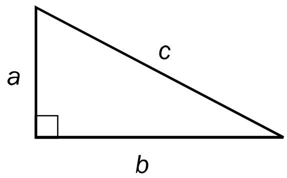


Conectar para comprender

Establecer conexiones entre diferentes dominios matemáticos (álgebra y geometría por ejemplo) desarrolla la comprensión. El matemático francés René Descartes (1596–1650) fue uno de los primeros en usar el álgebra para resolver problemas geométricos. Su mayor aportación fue la geometría cartesiana o de coordenadas.

> *Cada vez que el álgebra y la geometría estuvieron separadas, sus progresos han sido lentos y sus usos limitados, pero cuando estas dos ciencias se unieron, compartieron mutuamente sus fuerzas y marcharon juntas hacia la perfección.*
>
> Joseph Louis Lagrange, matemático francés, 1736–1813

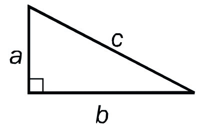
Demostración del teorema de Pitágoras



Podemos ver estas conexiones entre el álgebra y la geometría cuando se usan para abordar el mismo problema.

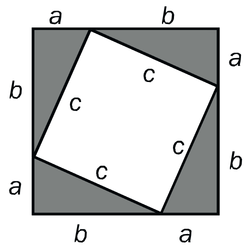
DEMOSTRACIÓN GEOMÉTRICA

Dibuje y recorte cuatro triángulos idénticos a este.



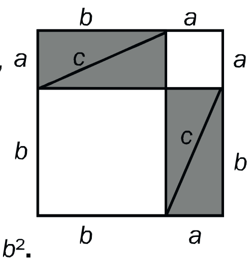
Dispóngalos de manera de formar un cuadrado con lados a + b, como este:

- ¿Cuál es el área del cuadrado del centro?



Reubique los triángulos para formar otro cuadrado, con la misma longitud de lado, como este:

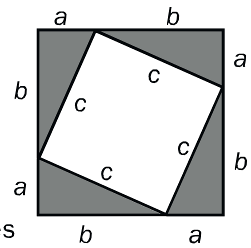
- ¿Qué área tienen los dos cuadrados blancos?



El área del cuadrado central del primer diagrama debe ser igual a la suma de las áreas de los dos cuadrados del segundo diagrama. Esto es, $c^2 = a^2 + b^2$.

DEMOSTRACIÓN ALGEBRAICA

Use el mismo diagrama, pero ahora observe los triángulos en lugar de los cuadrados.



- Use estos dos métodos para hallar el área del cuadrado grande, con lados $a + b$.

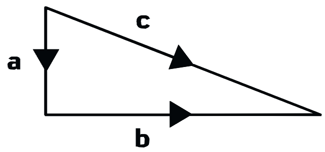
  Método 1. Eleve al cuadrado la longitud de los lados: $(a + b)^2$

  Método 2. Calcule el área de los cuatro triángulos congruentes y súmela a c^2, el área del cuadrado.

En ambos casos, se obtienen expresiones para el área del cuadrado grande.

Igualando estas expresiones, se obtiene $b^2 + 2ab + a^2 = 2ab + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

DEMOSTRACIÓN VECTORIAL



Represente los lados del triángulo rectángulo mediante vectores **a**, **b** y **c**.

Dado que forman un triángulo,	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$
Por lo tanto	$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}$
Aplicando propiedad distributiva	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = 0$, porque **a** y **b** son perpendiculares

Por lo tanto	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}$
O bien	$a^2 + b^2 = c^2$

- ¿Cuál método de demostración prefiere?
- ¿Cuál fue el más sencillo?
- ¿Cuál fue el más hermoso?