

Las Matemáticas de la Escala Musical

1. Frecuencia de un sonido

Las ondas sonoras se producen cuando un cuerpo vibra. Experimentalmente todos hemos asociado alguna vez las vibraciones de un objeto con los sonidos: al pulsar una cuerda de una guitarra, al hacer vibrar una varilla metálica sujeta por un extremo o el cambio que se produce en el ruido de un motor cuando aumenta de revoluciones.

Se llama **frecuencia** al número de vibraciones u oscilaciones completas efectuadas por segundo. Su unidad de medida es el "ciclo por segundo" también llamado **hercio** (Hz) en honor a Heinrich Rudolf Hertz. Según sea su valor podríamos calificar un sonido como: grave, medio o agudo. Un sonido grave corresponde a ondas sonoras con frecuencia baja mientras que los sonidos agudos se corresponden con frecuencias más altas.

Para que los humanos podamos percibir un sonido, éste debe estar comprendido en un rango de audición de 20 Hz a 20 000 Hz. Por debajo de este rango tenemos los infrasonidos y por encima los ultrasonidos. A este intervalo se le denomina rango de frecuencia audible. Cuanta más edad se tiene, este rango va reduciéndose tanto en graves como en agudos. Algunos animales pueden oír ultrasonidos inaudibles por los seres humanos.

2. Armonía Musical

En Música, la Armonía es un concepto bastante abstracto que hace referencia al orden y la estructura interna del lenguaje musical, equivalente quizás a la sintaxis del lenguaje hablado. Este "orden", en la música occidental, no responde a una cuestión puramente cultural o basada en una tradición sino también a las cualidades intrínsecas del sonido y nuestra forma de percibirlo. Una característica fundamental de la música occidental es la polifonía. Ninguna otra tradición ha cultivado hasta tal punto la combinación simultánea de distintos sonidos. Esto llevó a descubrir que determinados sonidos, sonando a la vez, resultaban agradables, consonantes o armónicos y otros, sin embargo, resultan sumamente desagradables, disonantes o inarmónicos. Este sencillo fenómeno es el origen de las escalas musicales que manejamos aún actualmente, el sistema tonal y los acordes.

Por ello resulta ser cierto aquello de que la música y las matemáticas están íntimamente relacionadas, pero no porque los músicos utilicen fórmulas matemáticas en su trabajo, sino porque las características del lenguaje musical occidental obedecen a cuestiones puramente acústicas, y éstas, en último término, son explicables mediante matemáticas.

3. Los griegos y las proporciones

Los conceptos de disonancia y consonancia han tenido distintos significados a lo largo de la historia, pero, por simplificar, diremos que dependen del "intervalo" que los separa. Un intervalo es la "distancia" entre dos sonidos (por ejemplo: la distancia de do a re, es menor que la distancia de do a fa), pero es muy importante saber que, aunque auditivamente percibimos esta distancia como algo lineal (relacionada con sumas y restas), físicamente un intervalo se corresponde con la proporción entre las frecuencias de los dos sonidos (relacionada con productos y divisiones). Y aquí viene lo mejor: cuando dicha proporción responde a un número "sencillo" (1, 2, 3, 4, 5, 6), los sonidos son consonantes, si la proporción responde a un número "raro" (1'35, 3'79), es probable que resulten disonantes. Evidentemente se trata de una cuestión bastante más compleja, pero en principio se puede afirmar que: dos sonidos son consonantes si la proporción entre sus frecuencias es un número entero menor que 7 ó estos números multiplicados o divididos por potencias de dos: 2, 3, 4, 5, 6, 1/2, 3/2, 5/2, 1/4, 3/4, 5/4, 1/8, 3/8 etcétera.

Esto, a los griegos, con el gusto que tenían por las proporciones, les fascinaba. Evidentemente, en el siglo VI a.C., Pitágoras no disponía de un afinador para conocer la frecuencia en Hercios de un sonido, pero él fue el primero en descubrir la relación entre lo grave o lo agudo que resultaba y las características del cuerpo que lo producía (tamaño, masa, tensión). Cuenta la leyenda que el filósofo hizo su hallazgo al pasar por una herrería al escuchar que los yunques de distintos tamaños producían sonidos diferentes. Sin embargo,

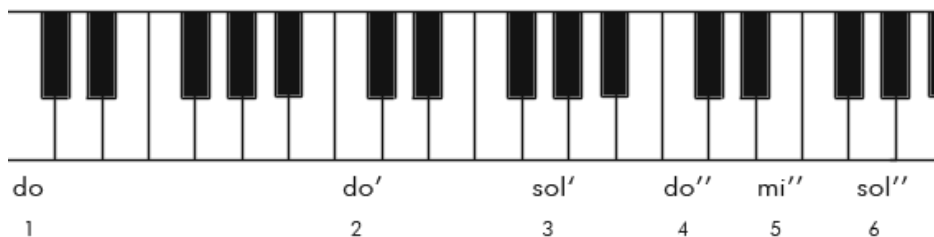
para la normalización de los "intervalos" musicales y las escalas que aún hoy en día utilizamos, utilizó un instrumento de cuerda. Pitágoras observó que cuando dividía una cuerda en proporciones exactas: la mitad, la tercera parte etc. los sonidos resultantes eran armónicos, mientras que si se desviaba de esta proporción, los sonidos resultaban disonantes.

Todos sabemos que cuanto más acortemos la cuerda más agudo resultará su sonido y viceversa. Dicho más matemáticamente, que las magnitudes: longitud de la cuerda y la frecuencia de la vibración que produce, resultan ser inversamente proporcionales. Comparando con la frecuencia del sonido que se produce al pulsar una cuerda tensa, si dividimos su longitud por la mitad producirá un sonido de doble frecuencia y si la dividimos por tres producirá un sonido cuya frecuencia es triple, etcétera.

Para los griegos, la música era la base de su filosofía pues en ella podían comprobar empíricamente que lo proporcional era bello (armónico, consonante) y lo bello era bueno. Probablemente, si el Partenón hubiese sido un poquito más alto, o sus columnas un poquito más anchas, la desproporción hubiese sido difícil de percibir. Sin embargo, en música, los intervalos debían ser exactos para ser consonantes. Solo mediante el sonido, las matemáticas y su belleza resultaban claramente perceptibles. Por todo ello, la música se consideraba un estudio fundamental y un medio para la purificación del alma así como la medicina lo era para el cuerpo. En palabras de un filósofo griego: "La música es para el alma lo que la gimnasia para el cuerpo".

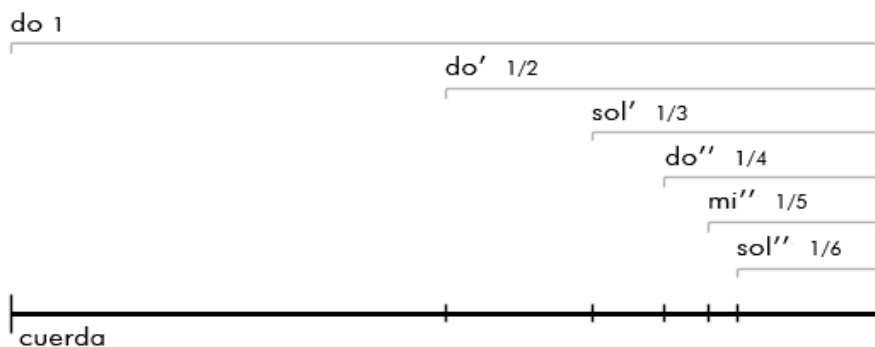
4. Los intervalos consonantes: la Octava Justa, la Quinta Justa y la Tercera Mayor

Dijimos que un **intervalo** es la distancia que separa dos sonidos o la proporción que existe entre sus frecuencias. Llamaremos intervalos **consonantes** a aquellos sonidos cuyas frecuencias están en proporción de un número entero menor que 7.

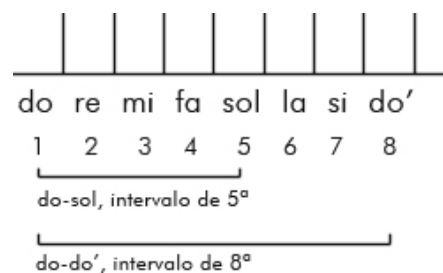


Son, por tanto, los intervalos que se obtienen al dividir una cuerda entre estos mismos números.

Relación de longitudes de onda respecto a la fundamental, "do".



En música, el intervalo entre dos notas se numera según el número de notas de la escala tradicional (do re mi fa sol la si) que las separa, incluidas las dos de los extremos. Así, por ejemplo: el intervalo do-sol sería una **Quinta**: 1 do, 2 re, 3 mi, 4 fa, 5 sol; el intervalo de un do al siguiente do más agudo (que se indica mediante un apóstrofe alto), una **Octava**: 1 do, 2 re, 3 mi, 4 fa, 5 sol, 6 la, 7 si, 8 do' y el intervalo do-mi sería una **Tercera**. ¡Ojo al contar las notas en intervalos consecutivos! Como la última nota del primer intervalo coincide con la primera del segundo no se trata de



sumar sin más ni más: Por ejemplo, dos terceras consecutivas no son 6 notas, sino 5. La tercera Do-mi seguida de la tercera mi-sol serían las 5 notas: Do-re-mi-fa-sol.

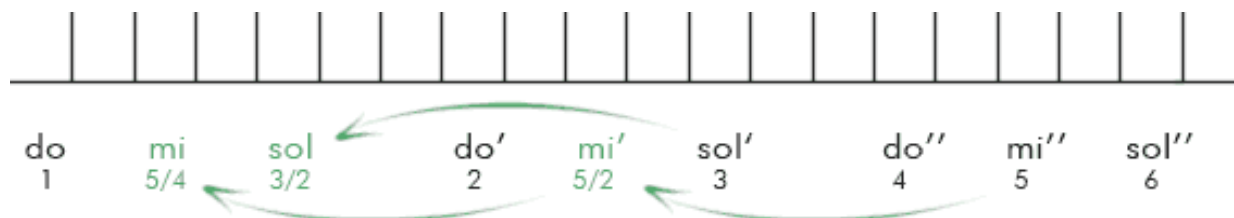
Multiplicando por 2: La Octava Justa

Supongo que todos recordáis la famosa canción de sonrisas y lágrimas ("do, es trato de varón"). Y, supongo que también recordáis que, después del sí "otra vez ya viene el do, do, do...". Esto, que parece trivial, denota una característica muy peculiar de nuestra audición y es que percibimos el sonido de forma cíclica o incluso circular. Este círculo se cierra cada vez que un sonido dobla su frecuencia. Es decir, si una nota determinada, pongamos, un do, tiene una frecuencia de 525 Hz, al oír un sonido con el doble de frecuencia, 1050 Hz, volvemos a reconocer "el mismo" sonido, un do, sólo que esta vez, más agudo. En música este intervalo se conoce como intervalo de 8ª Justa.

La semejanza entre dos sonidos separados por una 8ª, (esto es, dos sonidos cuyas frecuencias guardan una proporción de 2 a 1), es tal, que muchas veces no nos percatamos de que son sonidos diferentes. Por ejemplo: si se le pide a un hombre y a una mujer que canten la misma melodía, normalmente, la mujer la cantará una octava más aguda que el hombre. La cantará constantemente al doble de frecuencia, pero, probablemente, no se dé ni cuenta.

Partiendo siempre de una misma nota, por ejemplo de un do, duplicando su frecuencia tendríamos un do más agudo, al triplicarla tendríamos un sol, al cuadruplicar su frecuencia volveríamos a tener un do aun más agudo y al quintuplicarla obtendremos un mi muy agudo. Como al multiplicar o dividir entre dos cualquier frecuencia se obtiene la misma nota (respectivamente más aguda o más grave) las frecuencias en proporción $5/2$, $5/4$ ó 10 también corresponderán a distintos notas mi de la escala. Por las mismas razones las frecuencias en proporción $3/2$, $3/4$ ó 6 también corresponderán a distintos notas sol de la escala, sumamente parecidos al sol de frecuencia triple del do inicial. Son tan parecidos que el intervalo do-sol resulta siempre consonante, sea cual sea el sol que tomemos.

En el siguiente gráfico se muestra todo ello, sabiendo que los números no significan nada en sí mismos, no son los Hercios reales, sino que indican la proporción de los auténticos valores de frecuencia respecto de la frecuencia del do inicial.



Multiplicando por 3: La Quinta Justa

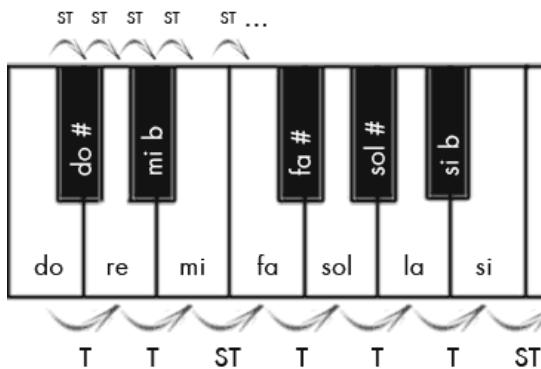
El siguiente intervalo consonante es el de 5ª Justa. Al triplicar la frecuencia de una nota cualquiera, obtenemos su 5ª aunque en una escala más aguda. Así, el intervalo do-sol por ejemplo, sería una 5ª: 1 do, 2 re, 3 mi, 4 fa, 5 sol. Es un intervalo fundamental, pues los griegos lo tomaron como base de su sistema musical.

Multiplicando por 5: La Tercera Mayor

La 3ª Mayor se obtiene al multiplicar por 5 la frecuencia fundamental aunque en una escala mucho más aguda. Así, el intervalo do-mi por ejemplo, sería una 3ªM: 1 do, 2 re, 3 mi. Este intervalo tardó bastante más en ser aceptado, en parte porque los griegos no le prestaron la menor atención.

5. La afinación pitagórica. El origen de la escala heptatónica.

¿Alguna vez os habéis preguntado por qué son así las teclas de un piano? El teclado sigue un patrón de 7 teclas blancas entre las que se intercalan 5 negras: un total de 12 teclas por octava. Las teclas blancas corresponden a las notas de la escala natural (do, re, mi, fa, sol, la, si), las teclas negras son las notas alteradas: do#, mi^b, fa#, sol#, si^b (# se lee sostenido y ^b se lee bemol). Entre cada tecla y la siguiente, sea blanca o negra, hay siempre el mismo intervalo: un semitono (ST), la mitad de un tono (T). Pero entonces, ¿por qué no están todas las teclas al mismo nivel?, ¿por qué algunas notas se consideran "naturales" y otras "alteradas"? ¿por qué los tonos y semitonos se distribuyen de esa manera y no otra en la escala natural (T, T, ST, T, T, T, ST)?, ¿por qué tiene precisamente 7 notas? La respuesta, de nuevo, está relacionada con Pitágoras.



La afinación por Quintas

Ya vimos que la 5ª de cualquier sonido se obtiene al multiplicar su frecuencia por 3. Sin embargo, así obtenemos su quinta pero perteneciente a una octava más aguda. Si ahora la dividimos entre dos, obtendríamos ese mismo sonido más grave, perteneciente a la misma octava de partida, en una proporción de 3/2 respecto a la fundamental. Ésta es la proporción que Pitágoras tomó como base de su sistema musical.

Para reconstruir este sistema, asignaremos razonadamente a cada nota de la escala natural una proporción de valor entre 1 y 2. Partiremos de la nota do y supondremos, nuevamente, que su frecuencia es 1. A partir de ahí, la multiplicaremos (salvo para hallar fa, que la dividiremos) sucesivamente por 3/2 para obtener cada nuevo sonido de la escala natural. La mayoría de estos sonidos aparecerán en escalas más agudas (o más grave en fa), pero para obtener estos sonidos en la escala original no tenemos más que bajarles (subirle en fa) una o varias veces de octava, esto es: dividir (multiplicar en fa) su frecuencia por dos. Todos los cálculos están hechos a continuación, en negrita aparecen los sonidos en la escala original, el apóstrofe(s) alto indica(n) que el sonido es de una escala más aguda y el apóstrofe bajo indica que el sonido es de una escala más grave.

do (1) × 3/2 = sol (3/2)

sol (3/2) × 3/2 = re' (9/4) re' (9/4) : 2 = re (9/8)

re' (9/4) × 3/2 = la' (27/8) la' (27/8) : 2 = la (27/16)

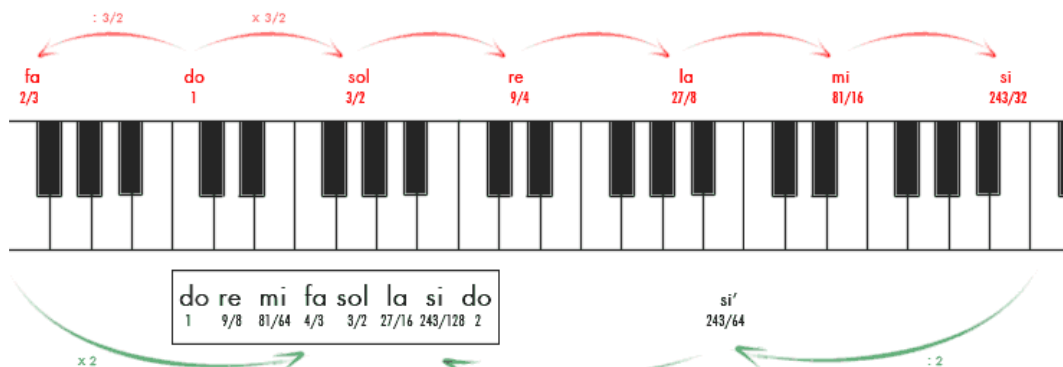
la' (27/8) × 3/2 = mi'' (81/16) mi'' (81/16) : 2 = mi' (81/32) mi' (81/32) : 2 = mi (81/64)

mi'' (81/16) × 3/2 = si''' (243/32) si''' (243/32) : 2 = si'' (243/64) si'' (243/64) : 2 = si (243/128)

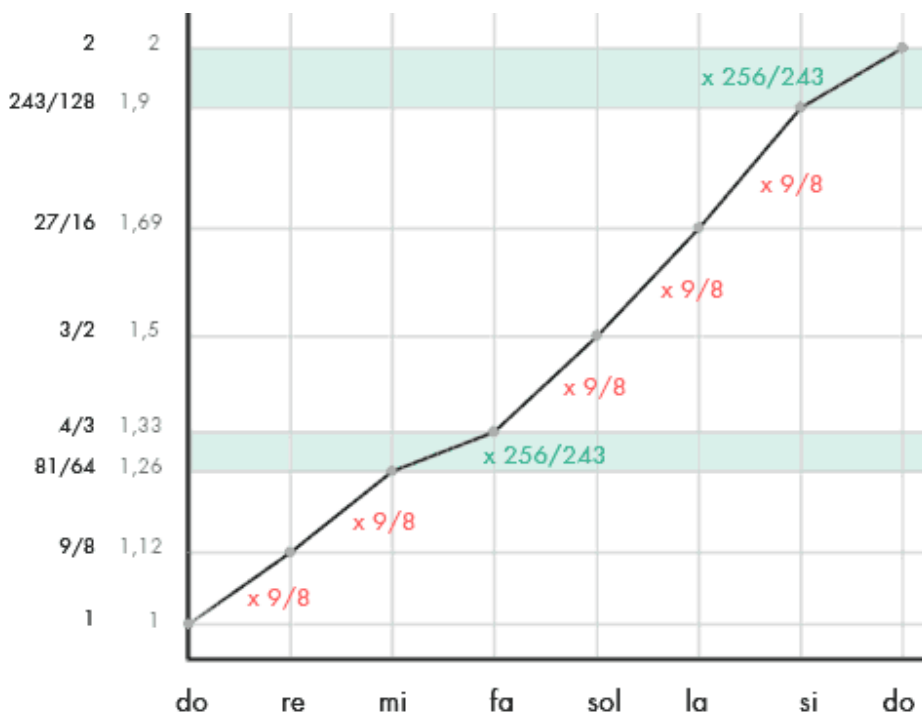
do (1) × 2 = do' (2)

do (1) : 3/2 = fa, (2/3) fa, (2/3) × 2 = fa (4/3)

El resultado es el que se ve en la siguiente imagen:



Si representamos estos ocho valores en un gráfico podemos observar varias particularidades de la escala: Al unir los puntos vemos que no están todos alineados, dos de los segmentos son distintos a los otros. En el mismo gráfico se muestran también todos los cocientes entre dos valores consecutivos. En los dos segmentos distintos el cociente es: $256/243$, que resulta ser mucho menor que el de los seis restantes: $9/8$.



Vemos entonces que existen cinco intervalos de mayor tamaño (un tono) y dos claramente más pequeños: entre el mi y el fa, y entre el si y el do agudo, aproximadamente de mitad de tamaño (un semitono) que los más grandes. Una solución natural de este "desajuste" sería crear cinco "nuevas" notas intermedias en los intervalos do-re, re-mi, fa-sol, sol-la y la-si, para conseguir "equilibrarlos". Este es el origen de las cinco teclas negras del piano. Si observamos ahora el teclado del comienzo, vemos que entre las teclas blancas correspondientes al mi y el fa, y entre el si y el do agudo no hay ninguna tecla negra, esos son los dos únicos intervalos de semitono que encontramos en la escala natural.

De esta manera, en el sistema musical occidental, cada octava queda dividida en 12 semitonos que juntos forman la escala cromática. Estos son los 12 sonidos básicos con los que está escrita el 90% de la música que conocemos y solemos escuchar, desde el Medioevo hasta nuestros días. Curiosamente, el sistema no lo inventó Pitágoras, surgió en Europa en la Baja Edad Media, pero como es consecuencia de la idea de afinar los intervalos por quintas, seguimos hablando de afinación pitagórica. La división en 12 sonidos, por tanto, no es una cuestión trivial ni arbitraria: parte de una base previa, con sus ventajas e inconvenientes. Sin tanto éxito, otros músicos a lo largo de toda la historia han propuesto sistemas diferentes, con una octava dividida en más sonidos.

6. Los problemas de la afinación pitagórica.

Sin embargo, como detallaremos a continuación, se puede observar que la escala cromática así afinada tiene serios defectos. El semitono no es la mitad exacta de un tono, ya que $\frac{256}{243} \neq \sqrt{\frac{9}{8}}$. Por ello, mediante esta afinación, tendríamos dos tipos de semitonos distintos, los cinco que hemos creado y los dos que ya teníamos entre el mi y el fa, y entre el si y el do agudo. Esto supone en la práctica un serio problema. Supongamos una melodía compuesta para una soprano, por lo que es bastante aguda, e imaginemos que tenemos una contra-alto, con la voz más grave, empeñada en cantar esta misma melodía. Tenemos dos opciones: bien dejarla dar gallos para poner a prueba nuestra resistencia a la tortura, o bien, transportar la melodía: haciendo que empiece en una nota más grave. Esto, en teoría, debería ser bastante fácil. En la antigüedad, con instrumentos de cuerda, no se andaban con remilgos y, en lugar de transportar la melodía, transportaban toda la escala sobre la que estaba construida. Así, una nota cualquiera como "do" podía tener una frecuencia de 500 Hz un día, y 635 Hz, al otro. Sin embargo, cuando aparecían en escena instrumentos de afinación fija (como un órgano o un clave), esa aleatoriedad se volvía imposible. Al estar la escala "fija", la única solución era transportar la melodía (hacer que empezase en otra nota de la misma escala) y ahí es

donde aparecía el problema: en la escala heptatónica se alternan tonos y semitonos en un orden determinado. Para repetir ese patrón desde otro punto de la escala, es necesario añadir semitonos intermedios entre ciertos tonos (he aquí el origen de las notas alteradas), pero además, es necesario que todos estos semitonos sean iguales, lo que no sucede en el sistema pitagórico. Por ello, el sistema de afinación pitagórico terminó siendo rechazado en pro del sistema temperado que se utiliza actualmente.

7. La afinación temperada

A pesar de que el sistema de afinación pitagórico es el único que respecta las dos consonancias principales (octavas y quintas), la incompatibilidad entre ambas daba lugar a bastantes inconvenientes. Como alternativa se propusieron otros sistemas a lo largo de la historia pero, finalmente, el sistema que se impuso fue el sistema temperado, basado en 12 semitonos iguales y que sólo respeta la consonancia de 8ª. Todos los demás intervalos resultan ligeramente disonantes. A pesar de ello, es un sistema óptimo para la música tonal, especialmente a partir del Barroco y el Clasicismo: cada vez más llena de modulaciones (cambios de tonalidad o de "escala"), alteraciones accidentales, cromatismos (empleo consecutivo de intervalos de semitono), etcétera.

El semitono temperado:

La razón de ser matemática del sistema temperado consiste en igualar los semitonos. Para ello vamos a averiguar cuánto mide el intervalo de semitono en este sistema. Un intervalo es una proporción de frecuencias, por lo que la frecuencia de cada nota de la escala cromática, se obtendrá de multiplicar la nota anterior por la proporción (razón) correspondiente a un semitono, que por el momento llamaremos "x". Si queremos saber, por ejemplo, cuál es la frecuencia de do#, multiplicaremos la frecuencia de do por "x". Para obtener re, volveremos a multiplicar el resultado obtenido por x, (o la frecuencia de do por x^2), etcétera. Por tanto, si queremos completar una octava con 12 intervalos iguales, necesitamos un semitono tal que al multiplicarlo 12 veces consecutivas por la frecuencia base, (pongamos 1), dé como resultado una frecuencia doble, (2, el mismo sonido una octava más agudo). Esto es: $1 \cdot x^{12} = 2 \Rightarrow x = \sqrt[12]{2} = 1,059$. Esta es la relación de frecuencias correspondiente a un semitono temperado. Este semitono es un valor intermedio de los dos semitonos pitagóricos.

La escala temperada:

Para hallar la proporción correspondiente a cualquier otro intervalo de la escala temperada, tan sólo tendremos que elevar $\sqrt[12]{2}$ al número de semitonos (ST) que contiene dicho intervalo. Por poner un ejemplo, para pasar de la frecuencia de un do a la de un fa# multiplicaríamos por $(\sqrt[12]{2})^6$ ya que son seis los semitonos que los separan: 1: do-do#, 2: do#-re, 3: re-mi, 4: mi-mi#, 5: mi-fa, 6: fa-fa#.

Numéricamente, ambos sistemas de afinación son muy parecidos. Las mayores diferencias se encuentran entre las notas alteradas, especialmente al llegar al sol#. Sin embargo, si escuchamos la escala diatónica de los sonidos naturales, afinada según el sistema pitagórico o el temperado, resultan casi indistinguibles. La 5ª Justa temperada es casi idéntica a la pitagórica, la 3ª Mayor difiere algo más entre un sistema y otro, pero sigue siendo claramente disonante en ambos.

Bibliografía

Blog de Almudena M. Castro:

- <http://www.enchufa2.es/archives/musica-y-matematicas-que-es-armonia.html>
- <http://www.enchufa2.es/archives/musica-y-matematicas-los-griegos-y-las-proporciones.html>
- <http://www.enchufa2.es/archives/musica-y-matematicas-los-intervalos-consonantes.html>
- <http://www.enchufa2.es/archives/musica-y-matematicas-la-afinacion-pitagorica-el-origen-de-la-escala-cromatica.html>
- <http://www.enchufa2.es/archives/musica-y-matematicas-la-afinacion-pitagorica-inconvenientes.html>
- <http://www.enchufa2.es/archives/musica-y-matematicas-la-afinacion-temperada.html>

Wikipedia

- <http://es.wikipedia.org/wiki/Sonido>

Actividades

1. Busca elementos -instrumentos, mecanismos, seres vivos, etc.- que produzcan sonidos de distintas frecuencias e indícalos en la siguiente tabla:

	Frecuencia (Hz)	Elemento que produce el sonido
Infrasonido		
Agudo		
Medio		
Grave		
Ultrasonido		

2. ¿Qué filósofo griego dejó escrito que "La música es para el alma lo que la gimnasia para el cuerpo"? ¿En qué época vivió?

3. Si juntásemos dos octavas consecutivas, ¿Serían 8+8=16 notas? O, ¿de cuántas notas estaríamos hablando? Pon un ejemplo.

4. Sabiendo que el do central de un piano se afina a 261,63 Hz, completa la tabla para comparar las frecuencias (redondeando a centésimas) de las restantes notas utilizando primero la afinación pitagóricas y después la afinación temperada indicando la proporción que se emplea en cada caso para pasar de una nota a la siguiente. Por último, divide (redondeando a diezmilésimas) para cada nota la frecuencia afinada por la afinación pitagórica entre la que resulta con la afinación temperada para comparar las diferencias entre ambas a lo largo de la escala.

Frecuencias (Hz)	do	re	mi	fa	sol	la	si	do'
Afinación pitagórica	261,63 Hz							
Proporción empleada								
Afinación temperada	261,63 Hz							
Proporción empleada								
Comparación	1							