El alumno deberá responder a cuatro bloques elegidos entre los seis que siguen.
La contestación deberá ser siempre razonada.
Cada uno de los bloques de preguntas puntúa por igual (2,5 puntos).

1. **La matriz de coeficientes de un sistema es** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 4a & 1 \end{pmatrix}$ **y la de términos independientes** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2a \end{pmatrix}$

(a) **¿Para qué valor o valores de *a* el sistema no tiene solución?**
(b) **Para cierto valor de *a* un individuo encontró 2 soluciones del sistema. ¿Cuánto valía *a*?; ¿tenía más soluciones el sistema?**
(c) **Encuentra un valor de *a* para el que el sistema tenga una única solución y, para dicho valor, resuélvelo.**

2. **Una tienda de moda está preparando su pedido de trajes para la próxima temporada. Para que cierto proveedor le haga unos precios especiales, el pedido debe incluir al menos 10 trajes de fabricación nacional y no sobrepasar los 20 trajes de ese tipo. Además, el número de trajes de fabricación nacional debería ser al menos una tercera parte del número de trajes de importación. Por otro lado, el beneficio que la tienda obtendría por la venta de cada traje de fabricación nacional sería de 120 euros y de 200 euros por la venta de cada uno de importación, y la tienda quiere que el beneficio total que se pueda alcanzar vendiendo todo el pedido sea como mínimo de 3600 euros.**

(a) **Se pretende calcular las unidades de cada producto que se pueden pedir al proveedor cumpliendo todos los requerimientos anteriores. Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría pedir 12 trajes de fabricación nacional y 45 de importación?**
(b) **Calcula las unidades de cada producto que se han de pedir para minimizar además el número total de trajes pedidos. Con ese pedido ¿qué beneficio obtendrá si se venden todas las unidades?**

3. **El peso que una plancha de cierto material es capaz de soportar depende de la edad de la misma según la siguiente función (el peso P en toneladas; t representa la edad en años de la plancha):**

$$P(t) = \begin{cases} 50 - t^2 & 0 \le t \le 3 \\ 56 - \dfrac{20t}{t+1} & t > 3 \end{cases}$$

(a) **¿Es el peso una función continua de la edad? Según vaya pasando el tiempo ¿la plancha cada vez aguantará menos peso?**

(b) **Dicen que por mucho tiempo que transcurra, la plancha siempre aguantará más de 40 toneladas. ¿Estás de acuerdo?**

(c) **Esboza un dibujo de la gráfica de P(t) cuidando la concavidad y convexidad de la función.**

4. **(a) Dada la función** $f(x) = 25 - x^2 + \frac{a}{x^2}$ **(x ¹ 0), donde *a* es una constante, encuentra una primitiva de *f*. Posteriormente, encuentra *a* para que si *f ´* es la derivada de *f*, entonces *f ´*(1) = - 2**

(b) **Dibuja la función** $f(x) = 25 - x^2$**, y halla el área limitada por la curva y el eje de abscisas entre los puntos de abscisa x = 1 y x = 6.**

5. **Un grupo de amigos ha estado hablando de sus gustos musicales. La música clásica gusta al 20% de ellos. Se sabe también que el porcentaje de los que les gusta la música moderna entre quienes les gusta la clásica es del 75 % y el porcentaje de los que les gusta la música moderna entre quienes no les gusta la clásica es del 87,5 %.**

(a) **¿Cuál es la probabilidad de que a un individuo del grupo le guste la música moderna?**

(b) **¿Cuál es la probabilidad de que a un individuo del grupo le guste tanto la música clásica como la moderna?**

(c) **Si a un individuo le gusta la moderna, ¿cuál es la probabilidad de que también le guste la clásica?**

(d) **Si a un individuo no le gusta la moderna, ¿cuál es la probabilidad de que sí le guste la clásica?**

6. **Un 43 % de la población adulta de cierta ciudad sabía realizar el cambio entre euros y pesetas correctamente. Mediante una campaña informativa se ha pretendido elevar ese porcentaje y parece que se han cumplido sus objetivos a la vista del resultado de una encuesta a 110 personas: de ellas 55 sabían realizar bien tales operaciones. Sin embargo hay quien duda de la efectividad de la campaña.**

(a) **Plantear un test para contrastar que la campaña no ha surtido efecto frente a que sí lo ha hecho. Si se concluye que el porcentaje se mantuvo y realmente subió, ¿cómo se llama el error cometido?**

(b) **¿A qué conclusión se llega en el test planteado en el apartado anterior a un nivel de significación del 1%?**

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: F(110) = 1, F(2,33) = 0,99, F(1,48) = 0,93, F(0,01) = 0,504.)

Solución de una de las posibles opciones

Pregunta 1

(a) El sistema no tiene solución cuando el rango de matriz de coeficientes, A, es distinto del rango de la matriz ampliada, M.

Tenemos:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 4a & 1 & 2a \end{array}\right) = M$$

El determinante de A, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 4a & 1 \end{vmatrix} = -4a^2 + 6a - 2$. Este determinante se anula cuando $a = 1$ o $a = 1/2$.

Con esto:

- Si $a \neq 1$ y $1/2 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.

- Si $a = 1$, se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) = M$

El rango de A es 2 pero el rango de M vale 3, pues el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Por tanto, si $a = 1$ el sistema no tiene solución.

- Si $a = 1/2$ se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) = M$

Como las filas primera y tercera son iguales $\Rightarrow$ r(A) = r(M) = 2. En este caso el sistema también tiene solución: es compatible indeterminado.

(b) Como acabamos de decir, si $a = 1/2$, el sistema tiene infinitas soluciones. Ese es el valor de a pedido.

(c) También hemos indicado más arriba que si $a \neq 1$ y 1/2 el sistema será compatible determinado: tiene solución única. En particular, para $a = 0$ el sistema tendrá una única solución; el sistema seria:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x \qquad\qquad = 1 \\ x \qquad + z = 0 \end{cases}$$

Su solución, que resulta inmediata, es: x = 1; z = –1, y = 1/2.

Pregunta 3

(a) Es una función continua pues los límites laterales en el punto t = 3, único en discordia, coinciden. En efecto:

$$\text{si } t \to 3^-, \ P(t) = 50 - t^2 \to 41$$
$$\text{si } t \to 3^+, \ P(t) = 56 - \frac{20t}{t+1} \to 41$$

La función es siempre decreciente pues su derivada, salvo en t = 3 en donde no es derivable, tiene signo negativo para t > 0. En efecto:

$$P'(t) = \begin{cases} -2t & 0 < t < 3 \\ \dfrac{-20}{(t+1)^2} & t > 3 \end{cases}$$

Por tanto, la plancha cada vez aguantará menos peso.

(b) No es verdad que la plancha aguantará siempre más de 40 toneladas pues su límite, cuando $t \to \infty$, vale 36. En efecto:

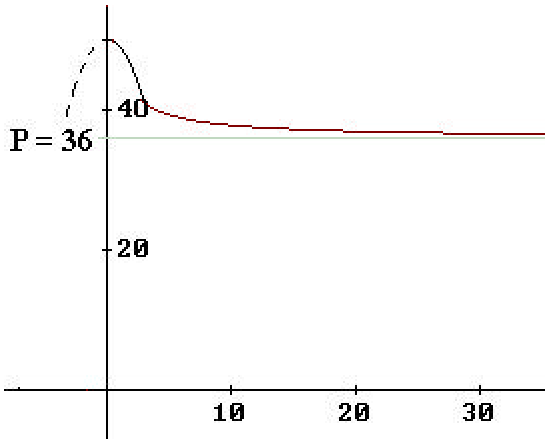
$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty}\left(56 - \frac{20t}{t+1}\right) = 56 - 20 = 36$$

(c) Hacemos la derivada segunda:

$$P''(t) = \begin{cases} -2 & 0 < t < 3 \\ \dfrac{40}{(t+1)^3} & t > 3 \end{cases}$$

Si 0 < t < 3, $P''(t) < 0 \Rightarrow$ P(t) es cóncava ($\cap$).
Si t > 3, $P''(t) > 0 \Rightarrow$ P(t) es convexa ($\cup$).
En t = 3 la función tiene un punto de inflexión: aunque no sea derivable, en ese punto la función pasa de cóncava a convexa.

Dando algunos valores: {(0, 50), (2, 46), (3, 41), (4, 40), (9, 38), …}; y teniendo en cuenta que la recta y = 36 (P = 36) es una asíntota horizontal, se obtiene la siguiente gráfica.



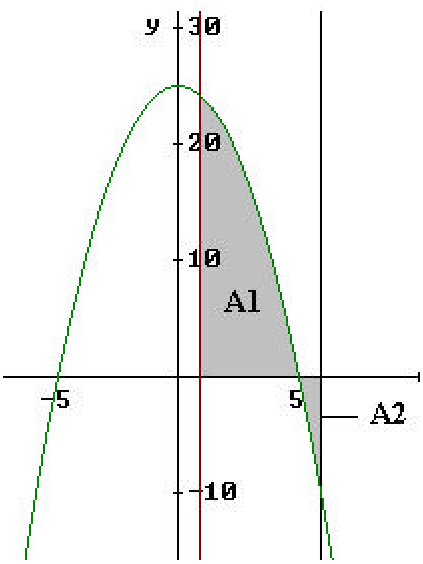
Pregunta 4

(a) Es una integral inmediata: $\int \left(25 - x^2 + \frac{a}{x^2}\right) dx = 25x - \frac{x^3}{3} - \frac{a}{x}$:

La derivada de *f* es: $f'(x) = -2x - \frac{2a}{x^3}$

Si $f'(1) = -2 \Rightarrow f'(1) = -2 - 2a = -2 \Rightarrow a = 0$

(b) La función $f(x) = 25 - x^2$ es una parábola; para representarla basta con dar algunos valores: (0, 25), (5, 0), (6, –9) …. El área pedida es la del recinto sombreado en la siguiente figura.



Su valor es:

$$A = A1 + A2 = \int_1^5 (25 - x^2)dx - \int_5^6 (25 - x^2)dx = \left(25x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_1^5 - \left(25x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_5^6$$

$$= \frac{176}{3} - \left(-\frac{16}{3}\right) = 64$$

Pregunta 6

Se trata de un contraste de hipótesis sobre la proporción.

La proporción de la población es: p = 0,43.

En la muestra se tiene: $\hat{p}$ = 55/110 = 0,50; n = 110.

(a) El contraste es unilateral, de una cola.

Hipótesis nula, H_0: p £ 0,43 (el porcentaje sigue igual o incluso bajó)
Hipótesis alternativa, H_1: $p >$ 0,43 (el porcentaje subió)

Si se concluye que el porcentaje sigue igual (que la situación no ha mejorado) y sin embargo esta conclusión fuera falsa, se dice que se comete un error de tipo II.

(b) Se admite que la proporción ha aumentado, para una significación α, cuando

$$\hat{p} > p + Z_a \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

siendo Z_a el valor correspondiente en la tabla normal para una significación α.

En nuestro caso, para una significación del 1% (el 99% de confianza), Z_a = 2,33 (F(2,33) = 0,99). Luego:

$$p + Z_a \sqrt{\frac{pq}{n}} = 0{,}43 + 2{,}33\sqrt{\frac{0{,}43 \cdot 0{,}57}{110}} = 0{,}43 + 0{,}11 = 0{,}54$$

Como $\hat{p}$ = 0,50 < 0,54 no puede rechazarse la hipótesis nula: no hay seguridad estadística para concluir que la situación ha mejorado.