EXAMEN COMPLETO

El alumno deberá responder a cuatro bloques elegidos entre los seis que siguen.
La contestación deberá ser siempre razonada.
Cada uno de los bloques de preguntas puntúa por igual (2,5 puntos).

1. **Un individuo realiza fotografías con una cámara digital. Sabe que cada fotografía de calidad normal ocupa siempre 0,20 megabytes de memoria. Cada fotografía de calidad óptima ocupa siempre una cantidad A de megabytes, pero el individuo no la conoce. Esta semana ha llevado a revelar 24 fotografías que le han ocupado un total de 9,2 megabytes de memoria.**
   (a) **Plantea un sistema de ecuaciones (en función de A) donde las incógnitas sean el número de fotos de cada clase que ha realizado. Estudia la compatibilidad del sistema.**
   (b) **¿Hay alguna cantidad de megabytes que es imposible que ocupe cada foto de calidad óptima?**
   (c) **La semana pasada también hizo 24 fotos y ocupó 9,2 megabytes de memoria en total. ¿Es posible que el número de fotos de cada tipo fuera diferente al de esta semana?**

2. **El jefe de seguridad de un museo estudia combinar dos nuevos sistemas antirrobo: cámaras de vigilancia en las salas, y alarmas en puntos estratégicos del edificio. Se quiere utilizar un mínimo de 6 cámaras para cubrir con ellas las salas más importantes, y un máximo de 15 cámaras, con las que quedarían todas las salas cubiertas. Igualmente, se necesitan al menos 6 alarmas para cubrir las más importantes entradas y salidas del edificio. Finalmente, se tiene un presupuesto máximo de 36.000 euros, y cada cámara cuesta 1.000 euros mientras que cada alarma cuesta 500 euros.**
   (a) **¿Qué combinaciones de unidades de cada sistema se pueden instalar cumpliendo los requerimientos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría instalar 7 cámaras y 59 alarmas?**
   (b) **Si el objetivo es colocar el mayor número de dispositivos entre cámaras y alarmas, ¿cuántos ha de colocar de cada modalidad? En ese caso, ¿cuál será el coste total?**

3. **El servicio de traumatología de un hospital va a implantar un nuevo sistema que pretende reducir a corto plazo las listas de espera. Se prevé que a partir de ahora la siguiente función indicará en cada momento (t, en meses) el porcentaje de pacientes que podrá ser operado sin necesidad de entrar en lista de espera:**

$$P(t)=\begin{cases} t^2-8t+50 & 0\le t\le 10 \\ \dfrac{38t-100}{0,4t} & t>10 \end{cases}$$

(a) **¿A partir de qué momento crecerá este porcentaje? Por mucho tiempo que pase, ¿a qué porcentaje no llegará nunca?**

(b) **Haz un esbozo de la gráfica de *P* a lo largo del tiempo.**

4. **(a) Encuentra la primitiva de la función** $f(x) = 27 - x^3 + 3e^{2x-1}$ **que en el 1 valga 26,75.**
   (b) **Dibuja la función** $f(x) = 27 - x^3$**, y calcula el área limitada por la curva y el eje X entre x = –3 y x = 5.**

5. **En un grupo de personas, al 50 % les han puesto alguna vez una multa de tráfico. Por otro lado, al 12,5 % no les han puesto nunca una multa pero sí han sufrido alguna vez un accidente. Finalmente, el 60 % de quienes nunca han tenido un accidente no les han puesto nunca una multa.**
   (a) **¿Qué porcentaje no han tenido nunca un accidente ni les han puesto nunca una multa?**
   (b) **¿Qué porcentaje no han tenido nunca un accidente?**
   (c) **Entre las personas que nunca han tenido una multa, ¿qué porcentaje no han tenido nunca un accidente?**

6. **En los últimos años el consumo familiar diario de cierta ciudad en electricidad (en Kw.) seguía una normal de media 6,3 con desviación típica de 1,2. Sin embargo, desde hace unos meses las tarifas eléctricas han experimentado varias reducciones y se piensa que esto ha debido repercutir en un aumento del consumo. Recientemente, para una muestra de 47 familias se ha obtenido un consumo medio diario de 6,8. Suponiendo que el consumo sigue siendo aproximadamente normal y que la desviación típica se ha mantenido:**
   (a) **Plantea un test para contrastar que el abaratamiento de las tarifas no ha influido en el consumo, frente a que ha tenido la repercusión que se piensa, como parecen indicar los datos. Si se concluyera que la media de consumo se ha mantenido y realmente subió, ¿cómo se llama el error cometido?**
   (b) **¿A qué conclusión se llega en el test planteado en el apartado anterior a un nivel de significación del 1%?**

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: F(6,8) = 1, F(2,86) = 0,998, F(2,33) = 0,99, F(0,01) = 0,504.)

Solución de una de las posibles opciones

Pregunta 1

(a) Si realiza x fotografías de calidad normal e y de calidad óptima, se tendrá:

cantidad: x + y = 24
memoria: 0,20x + Ay = 9,2

Sistema equivalente a: $\begin{cases} x + y = 24 \\ x + 5Ay = 46 \end{cases} \Rightarrow$

Restando ecuaciones: $(5A-1)y = 22 \Rightarrow y = \dfrac{22}{5A-1}$

El sistema sería incompatible cuando $5A-1=0 \Rightarrow$ A = 0,2

(b) El sistema no tendrá sentido si A < 0,2, pues obtendríamos valores negativos para *y*.

Tampoco tendrá sentido cuando se obtengan soluciones no naturales para x e y. Por ejemplo, si A = 0,3, y = 14,67, que no puede ser.

Por otra parte, el número de fotos de calidad óptima debe estar comprendido entre 1 y 24, esto es:

$$1 \le y = \frac{22}{5A-1} \le 24 \Rightarrow \frac{23}{60} \le A \le \frac{23}{5}$$

Nota: El valor y = 0 no puede darse, pues en la segunda ecuación se obtendría para x un valor de 46, que no es posible.

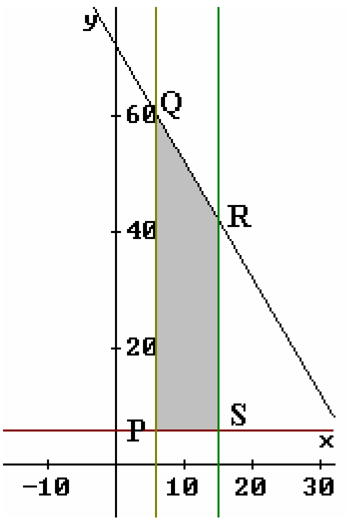
(c) Si A ≠ 0,20, con las excepciones indicadas anteriormente, el sistema será compatible determinado. Por tanto siempre tendrá solución única y el número de fotos de cada tipo sería el mismo en las dos semanas.

Pregunta 2

(a) Si se instalan x cámaras e y alarmas se tendrá:

Coste: $1000x + 500y \le 36000$
Cámaras: $6 \le x \le 15$
Alarmas: $y \ge 6$

El conjunto de soluciones viene dado por la región sombreada en la siguiente figura.



Se trata del polígono de vértices:
P = (6, 6),

Q: $\begin{cases} x = 6 \\ 1000x + 500y = 36000 \end{cases} \Rightarrow$ Q = (6, 60);

R: $\begin{cases} x = 15 \\ 1000x + 500y = 36000 \end{cases} \Rightarrow$ R = (15, 42);

S = (15, 6)

No pueden instalarse 7 cámaras y 59 alarmas, pues el punto (7, 59) cae fuera de la región factible: no cumple la restricción 1000x + 500y ≤ 36000.

(b) Si el objetivo es maximizar x + y, se consigue en el punto Q = (6, 60), instalando 6 cámaras y 60 alarmas. Se gastan los 36000 euros disponibles.

Pregunta 3

La función de porcentaje es continua en t = 10, pero no es derivable en ese punto.

En efecto:

$$\text{si } t \to 10^-,\ P(t) = t^2 - 8t + 50 \to 70$$

$$\text{si } t \to 3^+,\ P(t) = \frac{38t - 100}{0{,}4t} \to 70 \Rightarrow \text{es continua.}$$

Sin embargo,

$$P'(t) = \begin{cases} 2t - 8 & 0 \le t < 10 \\ \dfrac{100}{0{,}4t^2} & t > 10 \end{cases}$$

siendo $P'(10^-) = 12$ y $P'(10^+) = 2{,}5$.

(a) Para ver el crecimiento estudiamos el signo de la derivada.

P´(t) = 0 si t = 4.

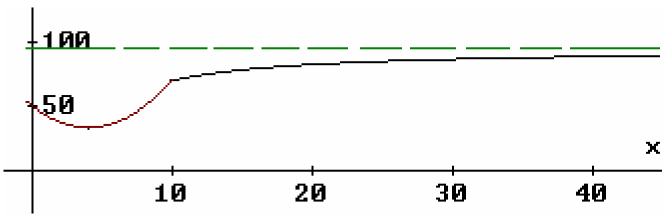
- Si 0 < t < 4, P´(t) < 0 ⇒ P(t) decrece.
- Si 4 < t < 10, P´(t) > 0 ⇒ P(t) crece.
- Si t > 10, P´(t) > 0 ⇒ P(t) crece.

Por tanto, el porcentaje crecer a partir de t = 4.

Cuando t → ∞, el porcentaje se acerca a 95, aunque nunca lo alcanza, pues:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{38t - 10}{0{,}4t}\right) = \frac{38^-}{0{,}4} = 95^-$$

(b) Dando algunos valores: {(0, 50), (2, 38), (4, 34), (8, 50), (10, 70), (12, 74,2), (20, 82,5), …}; y teniendo en cuenta que la recta y = 95 (P = 95) es una asíntota horizontal, se obtiene la siguiente gráfica.



Pregunta 4

(a) Es una integral casi inmediata:

$$F(x)=\int\left(27-x^3+3e^{2x-1}\right)dx=\int\left(27-x^3\right)dx+\frac{3}{2}\int\left(2e^{2x-1}\right)dx=27x-\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}e^{2x-1}+c$$

Si F(1) = 26,75 $\Rightarrow\ 27-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}e+c=26{,}75\ \Rightarrow\ c=-\frac{3}{2}e$

(b) $f(x)=27-x^3\ \Rightarrow\ f'(x)=-3x^2\ \Rightarrow\ f''(x)=-6x$

Como $f'(x)<0$ para todo x, la función es siempre decreciente.

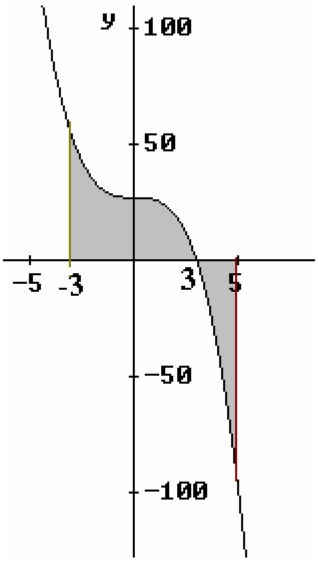
En x = 0 tiene un punto de inflexión, siendo convexa (∪) si x <0 y cóncava (∩) cuando x > 0.

Cortes con los ejes:

si x = 0, $f(0)=27\to$ punto (0, 27)

si y = 0, $0=27-x^3$, x = 3 → punto (3, 0)

Dando otros valores: (–2, 35); (1, 26); (2, 19); (4, –37), se obtiene la figura siguiente.



El área pedida es:

$$A=\int_{-3}^{3}\left(27-x^3\right)dx-\int_{3}^{5}\left(27-x^3\right)dx=$$

$$=\left(27x-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-3}^{3}-\left(27x-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{3}^{5}=$$

$$=162+82=244$$