El alumno deberá responder a cuatro bloques elegidos entre los seis que siguen.
La contestación deberá ser siempre razonada.
Cada uno de los bloques de preguntas puntúa por igual (2,5 puntos).

1. **Sean las matrices**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}x & 0 & z\\ 0 & y & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & -y & -z\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}0\\ a\\ a\end{pmatrix}.$$

(a) Sabiendo que (AB – C)D = 2E, plantea un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (representadas por *x, y, z*) en función de *a*.
(b) ¿Para algún valor de *a* el sistema tiene solución única?
(c) Para *a* = 0 encuentra una solución del sistema con $z \neq 0$.

2. **Un equipo de fútbol quiere poner a disposición de sus socios al menos 450 plazas entre autobuses y microbuses, con el fin de facilitar los desplazamientos para el próximo encuentro. El equipo contratará los vehículos a una empresa que le ofrece un máximo de 16 autobuses y de 10 microbuses, y que le exige que el número de microbuses que puede contratar sea al menos un 20 % del total de vehículos que contrate. Cada autobús tiene una capacidad de 50 plazas y cada microbús de 25.**
(a) ¿Qué combinaciones de vehículos de cada tipo se pueden contratar cumpliendo los requerimientos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
(b) Si quiere contratar el menor número posible de vehículos en total, ¿cuántos de cada tipo ha de contratar?, ¿cuál será el número máximo de socios que se podrán desplazar en ese caso?

3. **La gráfica de velocidad de un autobús en los 6 minutos previos a un accidente quedó recogida en el tacómetro, y se ajusta bastante bien a la siguiente función. V(t) es la velocidad en el tiempo t (t en minutos, de 0 a 6):**

$$V(t) = 24t - 15t^2 + 2t^3 + 100 \qquad 0 \le t \le 6$$

(a) Especifica los intervalos de tiempo en que la velocidad aumentó y aquéllos en que disminuyó.
(b) Dibuja la gráfica de velocidad, especificando, si los hay, los puntos de inflexión. ¿En qué momentos se alcanza la mayor y menor velocidad?
(c) **Especifica (si los hay) los máximos y mínimos relativos y absolutos.**

4. **(a) Encuentra la primitiva de la función** $f(x) = x - \dfrac{27}{x^2} + e^{(\frac{x}{2}+1)}$ **(x > 0) que en el 2 valga 15,5.**

(b) Dibuja la función $f(x) = x - \dfrac{27}{x^2}$ **(x > 0) y encuentra el área limitada por la curva y el eje X entre x = 1 y x = 5.**

5. En un grupo de matrimonios se ha observado que en el 50 % la mujer tiene estudios universitarios. En un 30 % de los matrimonios tanto el hombre como la mujer los tienen. Finalmente, en el 37,5 % de los matrimonios en los que el marido tiene estudios universitarios la mujer los tiene.
(a) ¿Qué probabilidad hay de que en un matrimonio el marido tenga estudios universitarios?
(b) ¿En qué porcentaje de matrimonios en los que la mujer tiene estudios universitarios el marido también los tiene?
(c) ¿En qué porcentaje de matrimonios el marido no tiene estudios universitarios y la mujer sí?

6. Una cadena de establecimientos comerciales lleva unos meses ofreciendo a sus clientes un descuento en sus compras siempre que estas se realicen utilizando la tarjeta propia de la cadena. Hasta que comenzaron los descuentos, la proporción de compras que se efectuaban con la tarjeta era del 18 %. Recientemente, se ha tomado una muestra de 150 compras de las cuales 39 han sido realizadas con la tarjeta.
(a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que los descuentos no han tenido efecto en el uso de la tarjeta, frente a que han aumentado su uso, como parecen indicar los datos. Si se concluyera que la proporción de compras realizadas con la tarjeta se mantuvo y esta conclusión fuera falsa, ¿cómo se llama el error cometido?
(b) Explica claramente a qué conclusión se llega en el test planteado en el apartado anterior para un nivel de significación del 1 %.
(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: F(150) = 1, F(39) = 1, F(2,55) = 0,995, F(2,33) = 0,99, F(0,26) = 0,603.)

Solución de una de las posibles opciones

Pregunta 1

(a) (AB – C)D = 2E $\Rightarrow \left[\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&0&z\\0&y&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x&0&0\\0&-y&-z\\0&0&0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0\\a\\a\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\left[\begin{pmatrix}x&y&z\\0&0&0\\x&y&z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x&0&0\\0&-y&-z\\0&0&0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2a\\2a\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0&y&z\\0&y&z\\x&y&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2a\\2a\end{pmatrix}$$

El sistema resultante es: $\begin{cases} y+z=0\\ y+z=2a\\ x+y+z=2a\end{cases}$

b) Para discutirlo hacemos transformaciones de Gauss:

$$\begin{cases} y+z=0\\ y+z=2a\\ x+y+z=2a\end{cases} \begin{matrix} E1-E2\\ \Leftrightarrow\\ E3-E2\end{matrix} \begin{cases} 0=-2a\\ y+z=2a\\ x=0\end{cases}$$

Observando la primera ecuación (E1) se tiene:

- si a = 0, el sistema es compatible indeterminado: en este caso, la primera y segunda ecuación son iguales.
- si $a \neq 0$, el sistema es incompatible.

Por tanto, en ningún caso el sistema tiene solución única.

(c) Para a = 0, el sistema queda: $\begin{cases} y+z=0\\ x=0\end{cases}$. Su solución es: $\begin{cases} x=0\\ y=-t\\ z=t\end{cases}$.

Una solución con z ≠ 0 es (0, 7, –7).

Pregunta 2

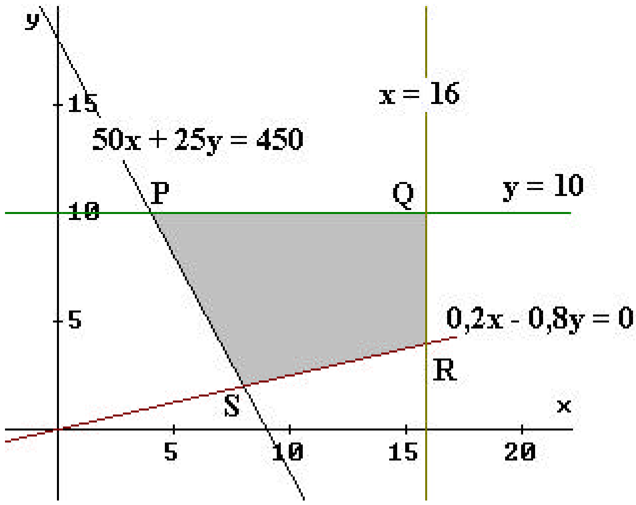
(a) Se trata de un problema de programación lineal.

Llamando x al número de autobuses e y al de microbuses, debe cumplirse que:

$x \leq 16$

$y \leq 10$
$y \geq 0{,}20(x + y) \Rightarrow 0{,}2x - 0{,}8y \leq 0$ (el número de microbuses que puede contratar sea al menos un 20 % del total de vehículos que contrate)
$50x + 25y \geq 450$ (al menos 450 plazas entre autobuses y microbuses)

Las soluciones buscadas deben satisfacer las inecuaciones anteriores. Estas soluciones se encuentran dentro o en los lados del cuadrilátero de vértices PQRS de la siguiente figura. (Advirtiendo, en este caso, que las soluciones deben ser enteras).



Los vértices son:

$$P: \begin{cases} y = 10 \\ 50x + 25 = 450 \end{cases} \rightarrow P = (4, 10); \quad Q = (16, 10)$$

$$R: \begin{cases} x = 16 \\ 0{,}2x - 0{,}8y = 0 \end{cases} \rightarrow R = (16, 4); \quad S: \begin{cases} 50x + 25y = 450 \\ 0{,}2x - 0{,}8y = 0 \end{cases} \rightarrow S = (8, 2)$$

(b) La función objetivo es: Minimizar $x + y$ (el número de vehículos).

Como sabemos, el mínimo se encuentra en alguno de esos vértices.

Evaluamos en cada uno de ellos y se obtiene que el mínimo se da en S, con un total de 10 vehículos. En este caso se podrán desplazar 450 socios.

Pregunta 3

(a) Hay que estudiar el signo de la derivada de V(T)

$$V'(t) = 24 - 30t + 6t^2 \quad \Rightarrow \quad V'(t) = 0 \text{ si } t = 1 \text{ o } t = 4$$

Luego:

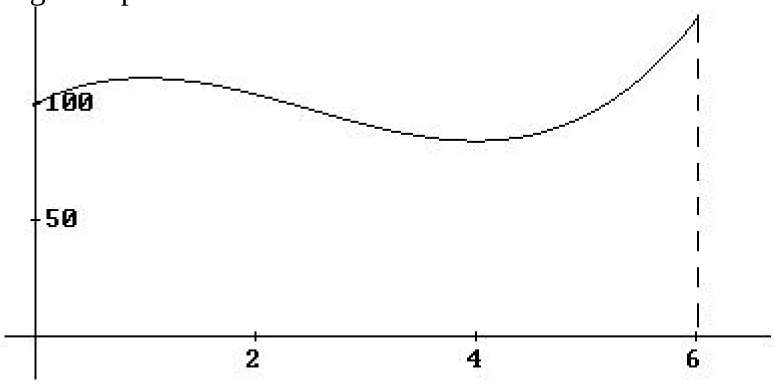
- si $0 \leq t < 1$, $V´(t) > 0 \Rightarrow V(t)$ crece
- si $1 < t < 4$, $V´(t) < 0 \Rightarrow V(t)$ decrece.
- si $4 < t < 6$, $V´(t) > 0 \Rightarrow V(t)$ crece

(b) La derivada segunda es:

$V´´(t) = -30 + 12t \quad \Rightarrow$ se anula si t = 30/12 = 2,5. En el minuto t = 2,5 la velocidad tiene un punto de inflexión.

Como V´´(1) < 0, en t = 1 se da un máximo relativo.
Como V´´(4) > 0, en t = 3 se da un mínimo relativo.

Dando algunos valores,{(0, 100); (1, 113); (2, 104); (3, 91); (4, 84); (5, 95); (6,136)}, puede trazarse la gráfica pedida.



La velocidad máxima absoluta se da en el instante del accidente, y es de 136 km/h.

Pregunta 5

Sea M el suceso mujer con estudios universitarios; $\overline{M}$ será su contrario.
Igualmente, designamos por H y $\overline{H}$ los sucesos hombre con estudios universitarios y su contrario, respectivamente.

Se sabe que:

$P(M) = 0,5 \Rightarrow P(\overline{M}) = 0,5$
$P(H \cap M) = 0,3$
$P(M/H) = 0,375$

a) Como

$$P(H \cap M) = P(H) \cdot P(M/H) \quad \Rightarrow \quad 0,3 = P(H) \cdot 0,375 \Rightarrow P(H) = 0,80$$

b) Por la probabilidad condicionada se tiene:

$$P(H/M) = \frac{P(H \cap M)}{P(M)} \Rightarrow P(H/M) = \frac{0,30}{0,50} = 0,60$$

En el 60 % de los matrimonios, si la mujer tiene estudios universitarios el marido también los tiene.

c) Si $P(H/M) = 0,6 \Rightarrow P(\overline{H}/M) = 1 - 0,6 = 0,4$. Por tanto, como

$$P(M \cap \overline{H}) = P(M) \cdot P(\overline{H}/M) \Rightarrow P(M \cap \overline{H}) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,20$$

En el 20 % de los matrimonios el marido no tiene estudios universitarios y la mujer sí.