EXAMEN COMPLETO

El alumno deberá responder a cuatro bloques elegidos entre los seis que siguen.
La contestación deberá ser siempre razonada.
Cada uno de los bloques de preguntas puntúa por igual (2,5 puntos).

1. **Sean las matrices**

$$A = 2\begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 10x \end{pmatrix}, D = 10\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{m} \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 3 & m \end{pmatrix}.$$

(a) Calcula cada uno de los tres productos AB, DE, EB.
(b) Si AB + C = D, plantea un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas (representadas por x e y) en función de m. ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución?; ¿es siempre única?

2. **Una empresa quiere decidir cuántos ordenadores portátiles y cuántos de sobremesa comprará. Dispone de hasta 88.000 euros y ha aceptado la oferta de un proveedor que le exige comprar por lo menos 30 ordenadores y que al menos un 10 % de los que compres sean portátiles. Cada ordenador portátil le sale por 2.000 euros y cada uno de sobremesa por 1.000.**
   (a) **¿Qué combinación de ordenadores de cada tipo puede comprar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.**
   (b) **Si quiere comprar el mayor número posible de ordenadores, ¿cuántos de cada tipo ha de comprar? ¿Y si lo que quiere es comprar el menor número posible de portátiles, cuántos de cada tipo debe comprar?**

3. **Una cadena de televisión ha presentado un nuevo programa para la franja de las 11 a las 15 horas. El share o porcentaje de audiencia de la primera emisión vino dado por la siguiente función, donde S(t) representa el share en el tiempo t, en horas. Para que el programa siga emitiéndose el share ha tenido que alcanzar en algún momento el 30 %**

$$S(t) = -t^3 + 36t^2 - 420t + 1596. \quad 11 \le t \le 15$$

(a) Indica cuándo creció el share y cuándo decreció. ¿El programa seguirá emitiéndose?
(b) Dibuja la gráfica del share.

4. **(a) Dada la función** $f(x) = \dfrac{a}{x} + 3x^2 - x^3$**, encuentra *a* para que si *f* ´es la derivada de *f*, entonces *f* ´(–1) = –10.**
(b) Dibuja la función $f(x) = 3x^2 - x^3$**. Encuentra el área limitada por la curva y el eje X entre x = –1 y x = 2.**

5. **En un grupo de amigos el 80 % están casados. Entre los casados, el 75 % tiene trabajo. Finalmente, un 5 % no están casados y tampoco tiene trabajo.**
   (a) **¿Qué porcentaje no tienen trabajo?**
   (b) **Si uno tiene trabajo, ¿qué probabilidad hay de que esté casado?**

(c) **¿Qué porcentaje están casados entre los que no tienen trabajo?**

6. **Se cree que el comportamiento de ciertos microorganismos marinos se ha visto afectado por un vertido de residuos, reduciéndose en particular el tiempo de vida de dichos microorganismos. Antes del vertido ese tiempo seguía una Normal de media 45 días y desviación típica 4 días. Unas semanas después del vertido se contabilizó el tiempo de vida de una muestra de 50 microorganismos, obteniéndose una media de 43 días de vida. Suponiendo que el tiempo de vida sigue siendo aproximadamente Normal y que la desviación típica se ha mantenido:**
   (a) **Plantea un test para contrastar la hipótesis de que el vertido de residuos no les ha afectado frente a que ha influido en la forma en que se cree. Si se concluye que sí afectó y esta conclusión fuera falsa, ¿cómo se llama el error cometido?**
   (b) **Explica claramente a qué conclusión se llega en el test planteado en el apartado anterior para un nivel de significación del 3 %.**

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: F(3,54) = 1, F(1,82) = 0,97; F(0,03) = 0,51.

Solución de una de las posibles opciones

Bloque 3

(a) Hay que estudiar el signo de la derivada de S(t)

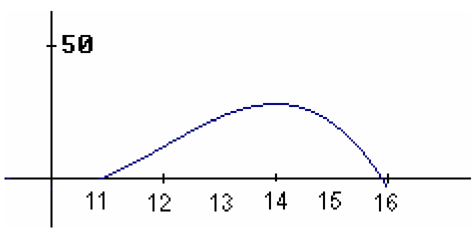
$$S'(t) = -3t^2 + 72t - 420 \;\Rightarrow\; S'(t) = -3(t-10)(t-14)$$
$$\Rightarrow S'(t) = 0 \text{ si } t = 10 \text{ o } t = 14 \text{ (La solución } t = 10 \text{ no interesa.)}$$

Luego:

- si $11 \le t < 14$, $S'(t) > 0 \Rightarrow$ S(t) crece
- si $14 < t < 15$, $S'(t) < 0 \Rightarrow$ S(t) decrece.

En consecuencia, en t = 14 se alcanza el máximo del share. Como este máximo vale S(14) = 28 < 30, el programa no seguirá emitiéndose.

(b) Dando algunos valores, {(11, 0); (12, 12); (13, 23); (14, 28); (15, 21)}, puede trazarse la gráfica pedida.



Bloque 4

(a)

$$f(x) = \frac{a}{x} + 3x^2 - x^3 \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{-a}{x^2} + 6x - 3x^2$$

Si $f'(-1) = -10 \;\Rightarrow\; -10 = \frac{-a}{(-1)^2} + 6\cdot(-1) - 3(-1)^2 \;\Rightarrow\; a = 1$

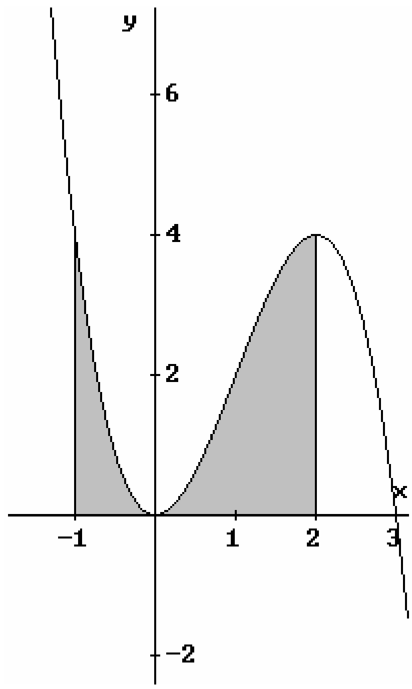
(b) $f(x) = 3x^2 - x^3 \;\Rightarrow\; f(x) = 6x - 3x^2 = 3x(2-x) \;\Rightarrow\; f''(x) = 6 - 6x$

La derivada primera se anula en x = 0 o x = 2. Luego:

- si x < 0, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decrece
- si 0 < x < 2, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crece ⇒ en x = 0 hay un mínimo.
- si x > 2, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decrece ⇒ en x = 2 hay un máximo.

La derivada segunda sea anula en x = 1, luego:

- si x < 1, $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es convexa (∪)
- si x > 0, $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava (∩) ⇒ en x = 1 hay punto de inflexión



La curva corta a los ejes en los puntos (0, 0) y (3, 3).
Dando otros valores,{(–1, 4); (1, 2); (2, 4); (4, –16)}, puede trazarse la gráfica pedida.

El área pedida es la sombreada en la figura. Su valor es:

$$A = \int_{-1}^{2} (3x^2 - x^3)\,dx = \left[x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^{2} =$$

$$= 8 - 4 - \left(-1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{21}{4}$$

Bloque 5

Sean los sucesos:

C = estar casado; S = soltero; T = tener trabajo; P = estar en paro

Se sabe que:

p(C) = 0,8 ⇒ p(S) = 0,2
p(T/C) = 0,75 ⇒ p(P/C) = 0,25 → (T/C = tener trabajo en el supuesto de estar casado; P/C = estar en paro si está casado)

$p(S \cap P) = 0{,}05$

(a) Por la probabilidad total:

$$p(P) = p(C \cap P) + p(S \cap P) = p(C) \cdot p(P/C) + p(S \cap P) =$$
$$= 0{,}80 \cdot 0{,}25 + 0{,}05 = 0{,}25$$

El 25 % no tiene trabajo.

(b) Por la probabilidad condicionada se tiene:

$$p(T/C) = \frac{p(T \cap C)}{p(C)} \Rightarrow p(T/C) = \frac{0{,}80 \cdot 0{,}75}{0{,}80} = 0{,}75$$

El 75 % de los que trabajan están casados.

(c) Igualmente:

$$p(C/P) = \frac{p(C \cap P)}{p(P)} = \frac{0{,}80 \cdot 0{,}25}{0{,}25} = 0{,}80$$

El 80 % de los parados están casados.

Bloque 6

Se trata de un contraste de hipótesis sobre la media.

Antes del vertido: $\mu = 45$.

Después del vertido. Media de la muestra: $\bar{x} = 43$, con n = 50

(a) El contraste es unilateral, de una cola.

Hipótesis nula, H_0: $\mu \geq 45$ (la media sigue igual o incluso subió)
Hipótesis alternativa, H_1: $\mu < 45$ (la media bajó)

Si se concluye que la media sigue ha bajado (aceptándose H_1) y sin embargo esta conclusión fuera falsa, se dice que se comete un error de tipo I.

(b) Se admite que la media poblacional ha disminuido, para una significación α, cuando

$$\bar{x} < \mu - Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

Siendo μ y σ los parámetros poblacionales (media y desviación típica poblacional) , $\bar{x}$ la media muestral y Z_α el valor correspondiente, para una distribución normal, con una confianza de $1 - \alpha$.

En nuestro caso, para α = 3 % , el 97 % de confianza Z_α = 1,82. Luego:

$$\mu - Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 45 - 1{,}82 \cdot \frac{4}{\sqrt{50}} = 43{,}97$$

Como $\bar{x} = 43 < 43{,}97$ se admite que la media de vida de dichos microorganismos ha disminuido.