FUNCIONES: INTERPRETACIÓN, CONTINUIDAD, DERIVACIÓN, OPTIMIZACIÓN Y REPRESENTACIÓN DE CURVAS

SEL - 98

ANDALUCÍA

2 La función $f(x) = \frac{1}{90}(-x^2 + 100x - 1\,600)$, representa el beneficio, expresado en millones de pesetas, que obtiene una empresa por la fabricación de x unidades de un determinado producto.

a) Represente gráficamente dicha función. (1,5 puntos.)

b) ¿Cuántas unidades hay que fabricar para que no se produzcan pérdidas? (0,75 puntos.)

c) ¿Cuál es el mayor beneficio posible? ¿Cuántas unidades deben fabricarse para obtenerlo? (0,75 puntos.)

CANTABRIA - I

Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{4-x}$. Determinar:

1. Su dominio de definición.

2. Sus asíntotas.

3. Situación de la curva en relación a sus asíntotas.

4. Máximos y mínimos.

5. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

6. Área encerrada por la curva, la asíntota correspondiente y las rectas $x = k$, $x = 2k$, siendo k el punto en el que la función tiene un máximo relativo.

CANTABRIA - II

Deseamos comprar 18 ordenadores y en el mercado hay dos tipos. Sabemos que el beneficio que podemos obtener de su uso está dado por el producto del número de ordenadores de un tipo que se compra por el cuadrado del número de ordenadores del otro tipo que se adquiere. Determinar el número de ordenadores de cada tipo que debemos adquirir para que el beneficio sea máximo.

CASTILLA LA MANCHA

Dada la función $f(x)$ se pide:

I) Gráfica de la misma.

II) Estudiar su continuidad y hallar a para que sea continua en $x = 4$.

III) Determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento.

IV) Hallar la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 3$ y en $x = 5$.

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| & x \le 1 \\ 2/x & 1 < x \le 4 \\ a & 4 < x \end{cases}$$

CASTILLA Y LEÓN I

Se ha lanzado verticalmente hacia arriba una piedra. La altura en metros alcanzada al cabo de t segundos viene dada por la expresión:

$$e = f(t) = 20t - 2t^2$$

a) Halla la velocidad media en el intervalo de tiempo comprendido entre $t = 0$ y $t = 5$.

b) ¿En algún momento la velocidad de la piedra ha sido de 15 m/s? Si es así, ¿a qué altura sucedió?

CASTILLA Y LEÓN - II

Halla el valor de k para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & \text{si } x \ne -2 \\ k & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

sea continua en $x = -2$.

CATALUÑA - I

Considera la función $y = \frac{x^2}{x+a}$. Di para qué valores del parámetro a la función es creciente en el punto de abscisa $x = 1$. (2 puntos.)

VALENCIA - I

Halla las dimensiones de una ventana de 6 metros de perímetro para que tenga la máxima superficie posible y, así, produzca la máxima luminosidad.

VALENCIA - II

Averigua razonadamente dónde alcanza el máximo absoluto la función:

- $f(x) = 2x + 4$ si $0 \le x \le 4$
- $f(x) = x^2 - 4$ si $4 < x \le 8$

EXTREMADURA - I

Una compañía de transportes ha comprobado que el número de viajeros diarios depende del precio del billete, según la función:

$$n(p) = 3\,000 - 6p$$

donde $n(p)$ es el número de viajeros cuando p es el precio del billete.

Obtener:

a) La función que expresa los ingresos diarios (I) de esta empresa en función del precio del billete (p).

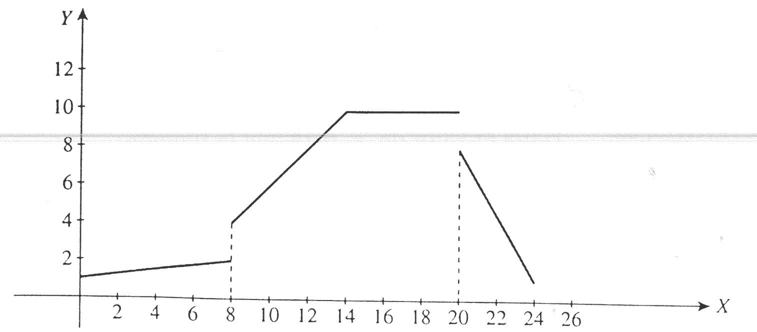
b) El precio del billete que hace máximos dichos ingresos.

c) ¿A cuánto ascenderán dichos ingresos máximos?

Justifica las respuestas.

EXTREMADURA - II

La gráfica siguiente representa el consumo de electricidad (en miles de kwh) de cierta empresa, en función de la hora del día.



Determina su expresión analítica.

GALICIA

En su modelo para los costes de almacenamiento y transporte de materiales para un proceso de manufactura, Lancaster (1976) obtiene la siguiente función de coste:

$$C(x) = 100\left(100 + 9x + \frac{144}{x}\right)$$

donde $C(x)$ es el coste total (en dólares) de almacenamiento y transporte (durante tres meses) de x toneladas de material.

a) ¿Qué cantidad de materiales hace que el coste sea mínimo?

b) ¿Cuáles son las asíntotas de esta función?

c) Representar dicha función para los valores de $x \geq 0$.

BALEARES

Se desea construir una caja abierta (sin tapa) recortando cuadrados iguales de cada una de las esquinas de una hoja de cartón rectangular de dimensiones 3 y 8 dm.

Calcula la longitud del lado del cuadrado que se ha de cortar para obtener una caja de volumen máximo.

LA LAGUNA

Algunos expertos estimaron, a comienzos de los años noventa, que el sida crecía a razón del 20% anual. Si suponemos que en esa fecha, en una determinada ciudad, había 1 000 enfermos de sida y la fórmula del crecimiento viene dada por $E(t) = 1\,000\,(1 + 0{,}20)^t$, se pide:

a) ¿Cuántos habría a comienzos de 1993? ¿Y en el año 2000?

b) ¿Cuánto tardará en duplicarse el número de afectados?

LA RIOJA

Sea la función $f(x) = \dfrac{2x}{1 - x^2}$.

a) Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto (2, −4/3). (1 punto.)

b) Hallar sus asíntotas, máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto.)

c) Represéntala gráficamente. (1 punto.)

MADRID - I

Un club deportivo cuenta con un número de socios que viene dado (en miles de personas) por la función:

$$s(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 26$$

donde x indica el número de años desde la última remodelación.

a) Hállese el año en el que el club ha tenido el mayor número de socios.

b) El cuarto año se remodeló de nuevo. Indíquese razonadamente si esta remodelación tuvo éxito o no.

MURCIA · I

Encontrar de entre todos los rectángulos de perímetro $2p$ el que tiene diagonal mínima.

MURCIA · II (rep. funciones)

Representar gráficamente la curva $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ encontrando:

I) Dominio, cortes con los ejes y simetrías.

II) Asíntotas y regiones.

¿Cuántos extremos tendrá, al menos, la curva y de qué tipo? Hallarlos.

PAIS VASCO

De una función $f(x)$ se sabe que está definida en el intervalo $[0, 4]$ y que la gráfica de su derivada $f'(x)$ es la línea quebrada que une los puntos $(0, 1)$, $(2, -1)$ y $(4, 1)$.

Hallar razonadamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus extremos relativos.

MURCIA III . (rep funciones)

Representar gráficamente la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -3 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ -2 & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{si } x < -3 \text{ o } x > 3 \end{cases}$$

¿En qué puntos es continua la función?

¿Cuál es la gráfica de la función $|f(x)|$?

OVIEDO - 95

Cierta empresa de material fotográfico oferta una máquina que es capaz de revelar y pasar a papel 15,5 fotografías por minuto. Sin embargo, sus cualidades se van deteriorando con el tiempo de forma que el número de fotografías por minuto será función de la antigüedad de la máquina de acuerdo a la siguiente expresión ($F(x)$ representa el número de fotografías por minuto cuando la máquina tiene x años):

$$F(x) = \begin{cases} 15{,}5 - 1{,}1x & 0 \leq x \leq 5 \\ \dfrac{5x + 45}{x + 2} & x > 5 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de la función F.

b) Comprobar que el número de fotografías por minuto decrece con la antigüedad de la máquina. Justificar que si tiene más de 5 años revelará menos de 10 fotografías por minuto.

c) Justificar que, por muy vieja que sea la máquina, no revelará menos de 5 fotografías por minuto.

ZARAGOZA - I

(2)

Dada la función $f(x) = 2x^2 + 4\,lnx$; se pide:

a) ¿Cuál es el dominio de definición de $f(x)$? (1 punto)

b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. Razonar si existen máximo y mínimo y, en caso afirmativo, calcularlos. (3 puntos)

c) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$. Razonar si existen puntos de inflexión y, en caso afirmativo, calcularlos. (4 puntos)

d) Determinar, si existen, las asíntotas de $f(x)$. (2 puntos)

ZARAGOZA - II

) Un cultivador de frutas cítricas estima que si se plantan 60 naranjos en un huerto, la producción media por árbol será de 400 naranjas y ésta disminuirá en un promedio de 5 naranjas por árbol por cada árbol adicional plantado en el huerto. Se pide:

I) Determinar la función de producción total de naranjas. (2 puntos)

II) ¿Cuántos árboles se deben plantar en el huerto para maximizar la producción total de naranjas? ¿Cuál es dicha producción máxima? Razonar la respuesta. (4 puntos)

GALICIA - II (Rep. Funciones)

)ada la función $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x^3$, calcular los puntos de corte con los ·jes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, intervalos de concavidad ' convexidad, asíntotas. Representar gráficamente $f(x)$.

C. LA MANCHA - II (rep. funciones)

n publicista diseña un panel publicitario que tiene la siguiente forma: ıse horizontal de 10 metros de longitud y resto del contorno limitado por función:

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x & 0 \le x \le 5 \\ -x + 10 & 5 < x \le 10 \end{cases}$$

ɜ pide:

Dibujar la gráfica del recinto correspondiente al cartel publicitario.

~~Calcular su superficie.~~

OVIEDO - 99 - Sept.

3.- Un individuo ha invertido en acciones de cierta compañía durante los últimos 10 años. El valor de su cartera a lo largo del tiempo (dinero invertido más beneficios obtenidos, en miles) viene dado por la siguiente expresión (x en años):

$$F(x) = (x - 2)^2 (1 - 2x) + 252x + 116 \qquad 0 \le x \le 10$$

(a) Determinar los intervalos de tiempo en que el valor de la cartera creció y aquellos en que decreció.

(b) El individuo retira sus ingresos transcurridos los 10 años. ¿Cuál hubiera sido realmente el mejor momento para haberlo hecho? ¿cuánto pierde por no haberlo retirado en el momento óptimo?

OVIEDO - 99 . Junio.

3.- Se ha investigado el tiempo (T, en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (x, en días), obteniéndose que:

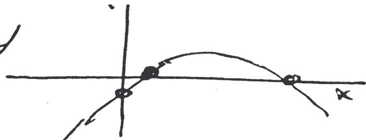
$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{300}{x+30} & 0 \le x \le 30 \\[2ex] \dfrac{1.125}{(x-5)(x-15)} + 2 & x > 30 \end{cases}$$

(a) Justificar que la función T es continua en todo su dominio.

(b) ¿Se puede afirmar que cuanto más se entrene un deportista menor será el tiempo en realizar la prueba? ¿Algún deportista tardará más de 10 minutos en finalizar la prueba?

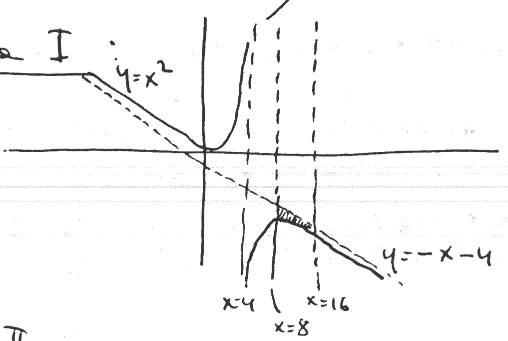
(c) Por mucho que se entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 1 minuto? ¿y en menos de 2?

Andalucía: a/



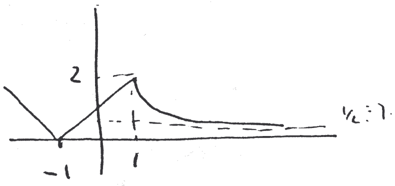
b/ $20<x<80$ c/ 50 10 millones pts.

Cantabria I



Cantabria II: 6 y 12

Castilla L. Mancha:



Castilla y León I: a/ 10 m/s b/ 21,87 m

Castilla y León II: $K=-4$

Extremadura I: a/ $I=3000p-6p^2$; p = precio;

b/ $p=250$ pta. Máximo

c/ 375.000 pta. diarias

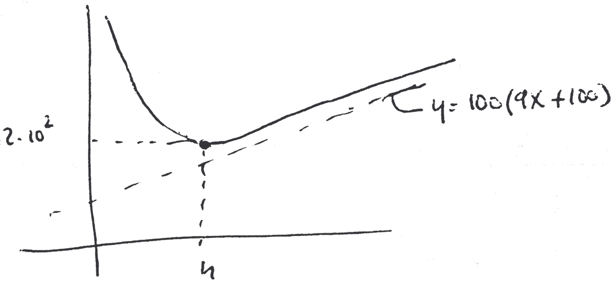
Cataluña I: $a>-\frac{1}{2}$

Valencia I: Cuadrada, lado 2

Valencia II: en $x=8$; $f(8)=60$

Extremadura II: $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{7}x+1, & \boxed{1<x<8} \\ x-4 & \boxed{8<x<14} \\ 10; & \boxed{14<x<20} \\ -\frac{7}{4}x+43 & \boxed{20<x<26} \end{cases}$

Galicia:



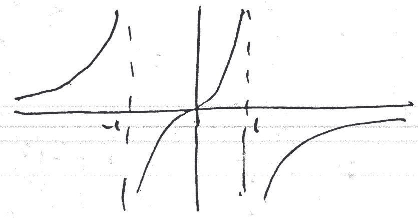
Aragón: $x=\frac{2}{3}$ dm.

La Laguna: a/ 1993 – 1728
2000 – 6.192.

b/ $t=3,8$ años

La Rioja: a/ $10x-9y-32=0$

b/
y c/



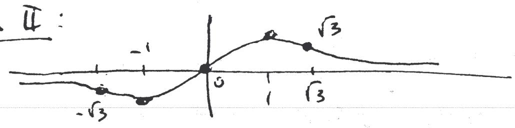
Madrid I: a/ $x=4$; b/ Sí

OVIEDO-98:

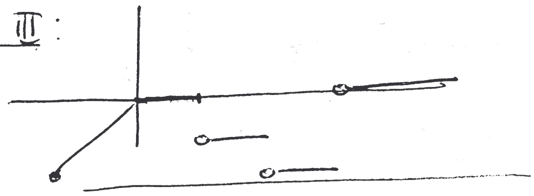
a/ Sí es continua b/ En $x=5$. $F(5)=10$, como la función es decreciente para $x>5$, el número de fotografías reveladas por minuto será menor de 10; c/ $\lim_{x\to\infty} = 5$

MURCIA-I: $x=\frac{P}{2}$; $y=\frac{P}{2}$ → diagonal mínima

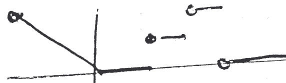
MURCIA II:



MURCIA III:



|Valor absoluto|

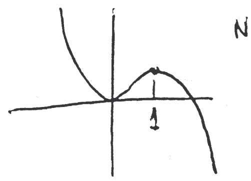


Zaragoza - I a/ $\mathbb{R}^+$ b/ Creciente. No max ni mínimo.
c/ $x=1$ punto de inflexión d/ $x=0$ asíntota vertical

Zaragoza - II a/ $-5x^2+100x+24000=f(x)$
b/ Añadir 10; luego 70 árboles → 24.500 naranjas

Galicia II:

No asíntotas.



Cast. la Mancha - II