Problemas de programación lineal. (2)

Soluciones al final. Procura hacerlos sin mirar las soluciones.

Asturias Junio 1998	2. **Una confitería es famosa por sus dos especialidades en tartas: la tarta Imperial y la tarta de Lima.** **La tarta Imperial requiere para su elaboración medio kilo de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de venta de 1.200 pesetas. La tarta de Lima necesita 1 kilo de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de venta de 1.500 pesetas.** **Debido a una mala previsión, se encuentra con la imposibilidad de realizar pedidos de huevos y azúcar, y elaborados ya todos los demás productos que ofertan, les quedan en el almacén 10 kilos de azúcar y 120 huevos para la preparación de las citadas tartas.** a) **¿Qué combinaciones de especialidades puede hacer? Plantear el problema y representar gráficamente el conjunto de soluciones.** b) **¿Cuántas unidades de cada especialidad han de producirse para obtener el mayor ingreso por ventas? ¿A cuánto asciende dicho ingreso?**
Asturias Junio 1999	2. **Un grupo musical va a lanzar un nuevo trabajo al mercado. La casa discográfica considera necesario realizar una campaña intensiva de publicidad, combinando dos posibilidades: anuncios en televisión, con un coste estimado de 1 millón de pesetas por anuncio, y cuñas radiofónicas, con un coste estimado de 100.000 ptas. por cuña. No obstante no pueden gastar más de 100 millones de ptas. para dicha campaña, a lo largo de la cual se tienen que emitir al menos 50 y no más de 100 cuñas. Un estudio de mercado cifra en 10.000 el número de copias que se venderán por anuncio de televisión emitido, y en 2.000 copias por cada cuña radiofónica emitida.** (a) **¿De cuántos anuncios y cuñas radiofónicas podrá constar esta campaña? Plantear el problema y representar gráficamente el conjunto de soluciones.** (b) **¿Qué combinación de ambos se deberá realizar para vender el mayor número de copias posible? ¿se llegan a gastar los 100 millones?**
Asturias Sep. 1999	2. **Por motivos de ampliación de plantilla, una empresa de servicios de traducción quiere contratar, a lo sumo, 50 nuevos traductores. El salario que ha de pagar a cada traductor de una lengua es de 200.000 pta, y de 300.000 a los que son de más de una lengua. Como poco, y por motivos de demanda, dicha empresa tiene que contratar a la fuerza a un traductor de más de una lengua. La política de selección de personal de la compañía obliga también a contratar al menos tantos traductores de una lengua como de más de una. Sabiendo que el objetivo fijado de beneficios totales es, como mínimo, de 12 millones de pesetas, y que los beneficios que aportan los traductores de una lengua son de 400.000 pta/traductor, y de 800.000 pta/traductor los de más de una lengua:** (a) **¿Cuántos traductores de cada tipo puede contratar? Plantear el problema y representar gráficamente el conjunto de soluciones.** (b) **¿Cuántos contratará para minimizar el gasto de salarios? Qué beneficios totales tendrá la empresa en este caso?**

Asturias Jun. 2000	**Una fábrica de muebles produce dos líneas de muebles, "clásico" (C) y "funcional" (F). Para su fabricación, los muebles requieren tiempo de proceso de construcción y pintura. El mueble clásico precisa una unidad de tiempo de construcción y tres de pintura, mientras que el funcional requiere dos unidades de tiempo de construcción y una de pintura. La situación actual de la empresa no permite utilizar más de diez unidades de tiempo de construcción y quince de pintura.** a) **Plantear el problema y representar gráficamente el conjunto de soluciones.** b) **¿Qué combinaciones de muebles puede fabricar?** c) **Si el beneficio empresarial es función del número de unidades fabricadas de acuerdo con la relación B = 3C + 2F, ¿cuántas unidades de cada línea deben fabricarse para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?**
Asturias Sep. 2000	6. **Una fábrica de confección de ropa especializada en faldas y pantalones recibe una partida de tela de 5.000 metros. Para la confección de los pantalones se precisan dos metros de tela y uno, para las faldas. Por razones productivas, la fábrica ha de confeccionar al menos el doble de pantalones que de faldas.** a) **Plantear el problema y representar gráficamente el conjunto de soluciones.** b) **¿Cuántas faldas y pantalones puede ofertar?** c) **Si la fábrica vende cada pantalón a un precio de 5.000 pesetas y cada falda a 3.000 pesetas, ¿cuántas faldas y pantalones debe vender para maximizar sus ingresos; cuál es el ingreso máximo que puede obtener?**
Asturias Jun. 2001	**La encargada de una floristería ha de hacer el pedido semanal de plantas de interior y de exterior. El precio que ha de pagar al proveedor por cada planta de interior es de 100 pta y de 200 por cada una de exterior. Al día de hoy, sabe que por lo menos ha de poder atender la demanda que un cliente ya le ha hecho, de 20 unidades de interior y 30 de exterior. Además, el transporte del pedido semanal hasta la floristería lo realiza una empresa especializada y le supone unos costes, que son de 60 pta por cada planta de interior y de 80 pta por cada planta de exterior, y la floristería tiene por norma que estos costes de transporte no sobrepasen las 4800 pta por pedido semanal. Asimismo, la encargada obtiene una prima de 60 pta por cada planta de interior que venda y 50 pta por cada una de exterior, y quiere que las primas que se puedan alcanzar vendiendo todo el pedido sean de al menos 3.000 pta.** (a) **¿Cuántas unidades de cada tipo puede pedir la encargada para cumplir todos los requerimientos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.** (b) **Si la floristería quiere además minimizar el precio que ha de pagar al proveedor por el pedido, ¿cuántas unidades de cada tipo ha de adquirir?, ¿cuánto deberá pagar al proveedor?, ¿cuáles serán los costes de transporte?**

Asturias
Sep.
2001

Una gestoría financiera que ofrecía hasta ahora tan solo préstamos personales pretende añadir a su cartera de productos los préstamos hipotecarios y se ve en la necesidad de rediseñar su política de firmas mensuales en base a los siguientes requerimientos:
Debe firmar mensualmente al menos 2 préstamos hipotecarios, pero por las dificultades que genera la introducción de ese producto no puede superar las 8 firmas mensuales de dichos préstamos. Por la misma razón, el número de firmas mensuales de préstamos hipotecarios ha de ser como máximo la mitad de las firmas mensuales de préstamos personales. Por otro lado, los costes de gestión son de 15.000 pta para cada firma de préstamo personal y de 30.000 pta para cada una de hipotecarios, no pudiéndose superar las 60.000 pta de gastos mensuales totales de gestión.
Si la comisión a percibir por la firma de cada préstamo personal es de 40.000 pta y de 100.000 para cada hipotecario:

(a) **Se pretende calcular las unidades de cada producto que puede firmar mensualmente cumpliendo los requerimientos de su nueva política de firmas. Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. Si un mes firma 10 personales y 8 hipotecarios, ¿cumple esos requerimientos?**
(b) **Calcula las unidades de cada producto que ha de firmar un mes para maximizar la comisión total y cumplir todos los requerimientos de su política. ¿A cuánto asciende dicha comisión?**

Soluciones

Asturias
Junio
1998

Solución:

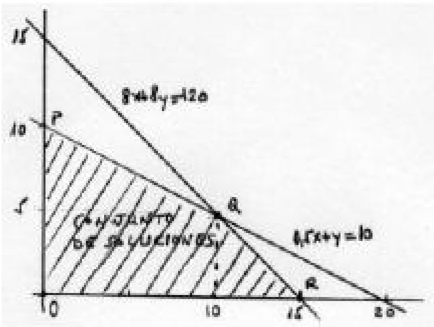
Con los datos anteriores se obtiene:

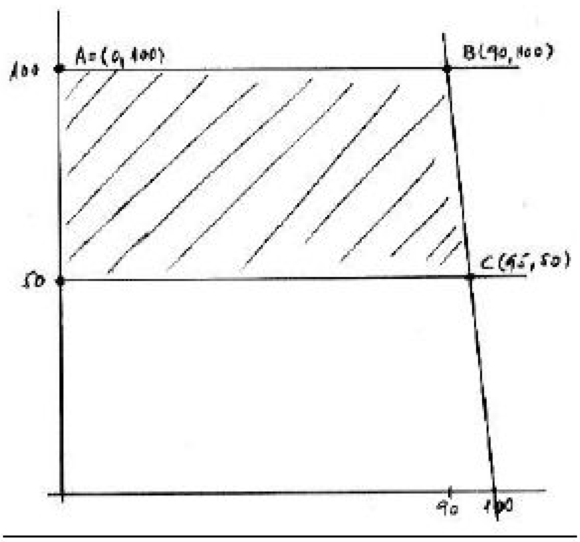
	Cantidad	Azúcar	Huevos	Ingresos
T. Imperial	x	0,5x	8x	1200x
T. Lima	y	y	8y	1500y
Existencias		10 kilos	120 huevos	

a) Las combinaciones posibles son las soluciones del sistema de inecuaciones:

$$0{,}5x + y \le 10$$
$$8x + 8y \le 120$$
$$x \ge 0;\; y \ge 0$$

Estas soluciones son las de la región factible dada en la figura adjunta.



	Más concretamente, todos los puntos de coordenadas enteras, interiores o de frontera del cuadrilátero de vértices: O=(0, 0), P=(0, 10), Q=(10, 5) y R=(15, 0). b) Se trata de maximizar I(x, y) = 1200x + 1500y, sujeta a las restricciones anteriores. El óptimo se da cuando x = 10 e y = 5, y supone un ingreso de I(10, 5) = 19.500 pesetas. (En los otros vértices se obtiene: I(0, 10) = 15.000; I(15, 0) = 18.000).
Asturias Junio 1999	**Solución:** Si se hacen x anuncios en televisión e y cuñas en radio, se tendrá: Función objetivo: maximizar f(x, y) = 10.000x + 2.000y Restricciones: (de presupuesto) $x + 0{,}1y \leq 100$ en millones (de cuñas) $50 \leq y \leq 100$ $x \geq 0$; $y \geq 0$ La región factible viene representada en la siguiente figura:  El número de cuñas varía entre 50 y 100, mientras que los anuncios publicitarios lo hacen entre 0 y 95. (b) La solución óptima se encuentra en alguno de los vértices de la región factible, que son: A = (0, 100) B = (90, 100) C = (95, 50) D = (0, 50) Las copias que se venderán en cada caso son: f(A) = 200.000 f(B) = 1.100.000 f(C) = 1.050.000 f(D) = 100.000 Por tanto, la solución óptima es hacer 90 cuñas y 100 anuncios televisivos, gastando íntegramente los 100 millones.

Asturias
Sep.
1999

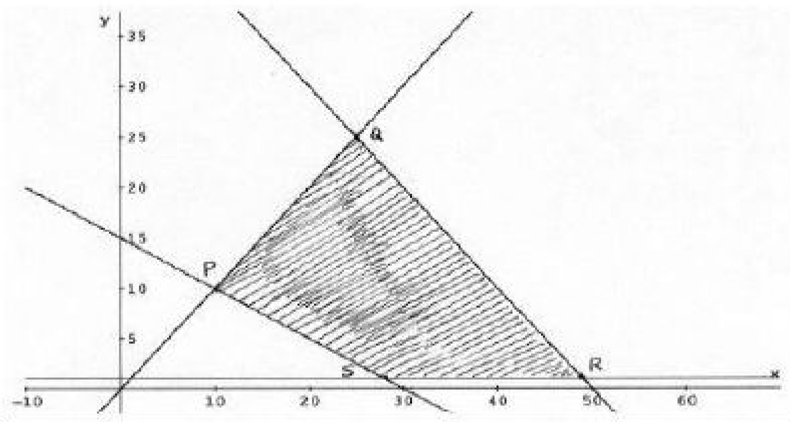
Solución:

Sean x e y los traductores de una lengua y de mas de una lengua, respectivamente.

Las restricciones del problema son:

$$x + y \leq 50$$
$$y \geq 1$$
$$x \geq y$$
$$0{,}4x + 0{,}8y \geq 12$$

El conjunto de soluciones (la región factible) son los puntos, interiores y de frontera, del cuadrilátero PQRS de la siguiente figura.



Los vértices son:

$$\text{P: } \begin{cases} x = y \\ 0{,}4x + 0{,}8y = 12 \end{cases} \Rightarrow \text{P} = (10, 10); \quad \text{Q: } \begin{cases} x = y \\ x + y = 50 \end{cases} \Rightarrow \text{Q} = (25, 25);$$

R = (49, 1); S = (28, 1)

b) El gasto en salarios es G(x, y) = 0,2x + 0,3y, en millones de pesetas.

Como sabemos, el gasto mínimo se da en alguno de los vértices de la región factible.

Su valor es:

En P, G(10, 10) = 5
En Q, G(25, 25) = 12,5
En R, G(49, 1) = 10,1
En S, G(28, 1) = 5,9

El gasto mínimo se consigue contratando 10 traductores de cada tipo.

En este caso, los beneficios totales serán: $0{,}4 \cdot 10 + 0{,}8 \cdot 10 = 12$ millones de pesetas.

Asturias Jun. 2000	see below

Solución:

a) Se trata de un problema de programación lineal.

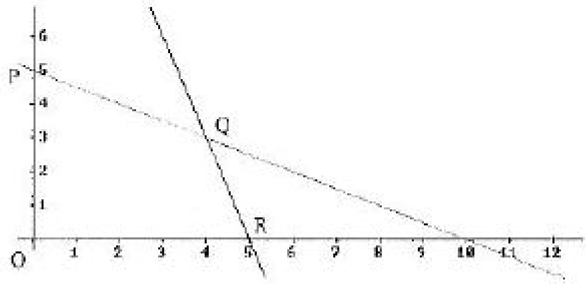
Con los datos anteriores se obtiene:

	Cantidad	Construcción	Pintura
Clásico	x	x	3x
Funcional	y	2y	y
Disponibilidades		10	15

Las restricciones son:

$$x + 2y \le 10$$
$$3x + y \le 15$$
$$x \ge 0;\ \ y \ge 0$$

Estas restricciones generan la región factible dada en la figura adjunta.



b) La región factible está formada por todos los puntos interiores y de frontera del cuadrilátero de vértices O, P, Q y R. Estos vértices son:

$$O = (0, 0),\ \ P = (0, 5),\ Q: \begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x + y = 15 \end{cases} \Rightarrow Q = (4, 3)\ \ y\ \ R = (5, 0).$$

c) Los beneficios viene dados por la función $B = 3C + 2F \Leftrightarrow B(x, y) = 3x + 2y$.

Como sabemos, la solución óptima se da en alguno de los vértices:

- En O, $B(0, 0) = 0$
- En P, $B(0, 5) = 10$
- En Q, $B(4, 3) = 18$. Es la solución buscada.
- En R, $B(5, 0) = 15$

Deberá fabricar 4 muebles clásicos y 3 muebles funcionales.

<table>
<tr><td>Asturias
Sep.
2000</td><td>

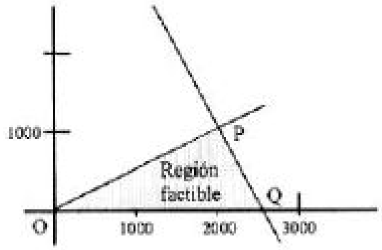
Solución:

a) Se trata de un problema de programación lineal. Designamos por x el número de pantalones y por y el número de faldas.

Las restricciones son:

$$\begin{array}{l} 2x + y \leq 5000 \\ x - 2y \geq 0 \\ x \geq 0;\ \ y \geq 0 \end{array}$$

Estas restricciones generan la región factible dada en la siguiente figura.



b) La región factible está formada por todos los puntos interiores y de frontera del triángulo de vértices O, P, Q. Estos vértices son:

$$O = (0, 0),\ P: \begin{cases} 2x + y = 5000 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow P = (2000, 1000)\ \text{ y }\ Q = (2500, 0).$$

c) Los ingreso vienen dados por la función I(x, y) = 5000x + 3000y.

Como sabemos, la solución óptima se da en alguno de los vértices:

- En O, I(0, 0) = 0
- En P, I(2000, 1000) = 13.000.000 pta. Es la solución buscada.
- En Q, I(2500, 0) = 12.500.000 pta.

Debe fabricar 2000 pantalones y 1000 faldas.

</td></tr>
<tr><td>Asturias
Jun.
2001</td><td>

Solución

(a) Se trata de un problema de programación lineal.

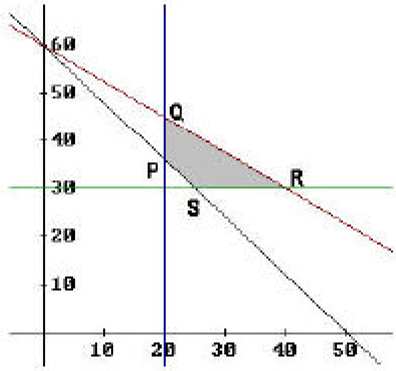
Llamando x al número de plantas de interior e y al de interior, se tiene:

Restricciones: $x \geq 20;\ y \geq 30$
$60x + 80y \leq 4800$ (costes de transporte)
$60x + 50y \geq 3000$ (primas)

Objetivo: Minimizar f(x, y) = 100x + 200y, precio a pagar.

Las restricciones anteriores generan la región factible dada en la siguiente figura.

</td></tr>
</table>



Los vértices son:

P = (20, 36), Q = (20, 45), R = (40, 30), S = (25, 30)

(b) Como sabemos, el precio mínimo a pagar se da en alguno de esos vértices. Ese precio es:

En P, f(20, 36) = 9200.
En Q, f(20, 45) = 11000.
En R, f(40, 30) = 10000.
En S, f(25, 30) = 8500.

El precio mínimo a pagar será de 8500 pta.

Los costes de transporte son de $60 \cdot 25 + 80 \cdot 30 = 3900$ pta.

Asturias
Sep.
2001

Solución:

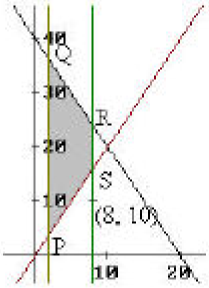
Se trata de un problema de programación lineal.

(a) Sean x e y el número de créditos hipotecarios y personales, respectivamente, que pueden firmarse.

Los requerimientos deben cumplir las siguientes desigualdades:

$$2 \le x \le 8$$
$$x \le \frac{y}{2} \Rightarrow 2x - y \le 0$$
$$30000x + 15000y \le 600000 \Rightarrow 2x + y \le 40$$

Estas restricciones generan la región factible (sombreada) dada en la siguiente figura.



El punto (8, 10) no cumple los requerimientos dados, pues cae fuera de la región factible.

(b) Como sabemos, la solución óptima se da en alguno de los vértices de esa región, que son los cortes de las rectas correspondientes:

P = (2, 4), Q = (2, 36); R = (8, 24); S = (8, 16)

La función objetivo es maximizar la comisión, que es:

C(x, y) = 100000x + 40000y

Su valor en los vértices es:

En P, C(2, 4) = 360 000
En Q, C(0, 12) = 1 640 000
En R, C(8, 24) = 1 760 000
En S, C(8, 16) = 1 440 000

La comisión máxima se obtiene firmando 8 créditos hipotecarios y 24 personales. Asciende a 1 760 000 pta.