MATEMATICAS I

1989

ESCOGER UNA DE LAS DOS ALTERNATIVAS SIGUIENTES

ALTERNATIVA 1

1.1 (3 puntos) Definición de subespacio vectorial.
Enunciar y demostrar la condición necesaria y suficiente que caracteriza un subespacio vectorial.

1.2 (4 puntos) a) Verificar los axiomas de probabilidad, para la probabilidad condicionada por un suceso dado B con $P(B) > 0$.

b) Sean A y B dos sucesos independientes, con probabilidades $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$

Calcular: 1) $P(A \cup B)$; 2) $P(A \mid A \cup B)$; 3) $P(A \mid A \cup B)$.

[NOTA : A es el suceso contrario de A]

1.3 (3 puntos) Una función f está definida para todo número real x mediante

$$f(x) = 3 + \int_0^x \frac{1 + \text{sen. } t}{2 + t^2}\, dt$$

Hallar un polinomio de segundo grado, P(x), tal que : $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$, $P''(0) = f''(0)$.

ALTERNATIVA 2

2.1 (4 puntos) Enunciar y demostrar el teorema fundamental del Cálculo Integral para funciones continuas en un intervalo cerrado.

2.2 (3 puntos) a) Definir continuidad y derivabilidad de una función en un punto.
b) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 1, \quad \text{si } x \le 0 \\ &= 1 \quad\quad\quad \text{si } 0 < x < 1 \\ &= (x - 3)^2, \text{ si } 1 \le x < 3 \\ &= 0 \quad\quad\quad \text{si } 3 \le x. \end{aligned}$$

2.3 (3 puntos) Hallar el punto simétrico del $P(4, 1, 6)$ respecto de la recta

$$x - y - 4z + 12 = 0$$
$$2x + y - 2z + 3 = 0$$

MATEMATICAS I

1989

ESCOGER UNA DE LAS DOS ALTERNATIVAS SIGUIENTES

ALTERNATIVA 1

1.1 (4 puntos) Definir producto vectorial de dos vectores. Interpretación geométrica. Dados 3 puntos del espacio, tomados como vértices de un triángulo, calcular su area por aplicación del producto vectorial.

1.2 (3 puntos) Definir base de un espacio vectorial. Demostrar que si todo vector x de un espacio vectorial puede expresarse de manera única como combinación lineal de un sistema de vectores $\{e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n\}$, dicho sistema es una base.

1.3 (3 puntos) Una fabrica produce un determinado tipo de piezas que empaqueta en cajas de tres modelos distintos. La proporción de piezas defectuosas en cada una de las cajas es respectivamente 2%, 3% y 5%. Un comerciante solicita una caja de piezas sin especificar el modelo. Sabiendo que la probabilidad de recibir una caja del modelo uno es 0.5 , del modelo dos 0.4 y del modelo tres 0.1 , calcular :

a) La propabilidad de que elegidas tres piezas de la caja recibida, sean no defectuosas.

b) Suponiendo que no han sido defectuosas, ¿cual es la probabilidad de que procedan del modelo número dos ?.

ALTERNATIVA 2

2.1 (3 Puntos) a) Enunciar el teorema de Darboux.

b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que $f(a) \neq f(b)$, y sólo toma una vez cada uno de los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ ¿Implica esto que f es continua en [a, b] ?. Justificar la respuesta.

2.2 (3 puntos) Definir primitiva o integral indefinida de una función $y = f(x)$. Encontrar una primitiva de la función $y = x^3(\ln x)$.
(Nota : ln = logaritmo neperiano).

2.3 (4 puntos) Hallar : 1) La ecuación de la perpendicular trazada por el punto (0,0,3) al plano $x - 5y - z + 8 = 0$; 2) Las coordenadas del pie de esta perpendicular; 3) Las coordenadas del punto simétrico del (0,0,3) respecto del plano dado.

MATEMATICAS I

1989

ESCOGER UNA DE LAS DOS ALTERNATIVAS SIGUIENTES

ALTERNATIVA 1

1.1 (3 Puntos) Deducir las ecuaciones : vectorial y general o implícita de un plano, conocido uno de sus puntos y un vector característico .

1.2 (3 Puntos) Definir sistema libre de vectores. Dados los sistemas de vectores de un espacio vectorial $S_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ y $S_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ donde $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3 + \ldots + a_p\mathbf{u}_p$ con $a_2, a_3, \ldots, a_p$ escalares, probar que S_1 es libre si y sólo si S_2 es libre.

1.3 (4 Puntos) a) Hallar el area limitada por la función $f(x) = 1/2 + \cos.x$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

b) Hallar el volúmen del cuerpo de revolución engendrado al girar alrededor del eje Ox, la región del apartado anterior.

ALTERNATIVA 2

2.1 (3 Puntos) Sea A un suceso con $0 < P(A) < 1$. Justificar las respuestas :

a) ¿Puede ser A independiente de su contrario $\bar{A}$?

b) Sea B otro suceso tal que $B \subset A$. ¿ Serán B y A independientes ?

c) Sea C un suceso independiente de A. ¿ Serán A y C independientes ?

2.2 (4 Puntos) a) Enunciar la regla de la derivación de la composición de funciones.

b) Sea $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f'(x) = f(1/x)$ para todo $x \neq 0$. Demostrar :

1) f es derivable dos veces.

2) existen números reales a, b, c tales que $ax^2 f''(x) + bxf'(x) + cf(x) = 0$ y $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

2.3 (3 Puntos) a) Demostrar que el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales es espacio vectorial sobre sí mismo.

b) Calcular su dimensión y obtener una base.

c) Sea $M_3(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 3 sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, y sea f la aplicación de $M_3(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(A) = |A|$ (determinante de A). ¿ es f una aplicación lineal ? Porqué

MATEMATICAS I

1989

ESCOGER UNA DE LAS DOS ALTERNATIVAS SIGUIENTES

ALTERNATIVA 1

1.1 (3 puntos) Definir orden de un infinitésimo respecto de otro, e infinitésimos equivalentes.

Comparar los infinitésimos $\frac{1}{x^4}$ y $\frac{1}{x^3}$ cuando x tiende a ∞.

¿ Es cierto que $\frac{1}{x^4}$ es de orden superior a $\frac{1}{x^3 \operatorname{sen}.x}$ cuando x tiende a ∞ ? ¿ Porqué ?

1.2 (3 puntos) Definir diferencial de una función en un punto. Interpretación geométrica.

Calcular, sustituyendo el incremento de la función por su diferencial, el valor aproximado de $\sqrt{0,98}$

1.3 (4 puntos) El encargado de un laboratorio químico dispone de 10 recipientes con tres tipos de reactívos : A, B y C. Tres de ellos continen el reactívo A, cinco el B y dos el C.

Se eligen dos recipientes simultáneamente al azar, calcular :

a) Probabilidad de que un reactívo sea de A y otro de B.

b) Si la sustancia C reacciona provacando una explosión inmediata. ¿Cuál es la probabilidad de que haya explosión?.

c) Probabilidad de que haya elegido los dos recipientes del reactívo A.

ALTERNATIVA 2

2.1 (3 Puntos) Enunciar y demostrar el teorema de Rouché-Frobenius.

2.2 (3 Puntos) ¿ Qué es un subespacio de un espacio vectorial ?

Consideremos el conjunto M de polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que 4. ¿ Es un espacio vectorial ? Porqué.

¿ El conjunto N_1 de polinomios de grado 2 es subespacio de M ? Porqué.

¿ Y el conjunto N_2 de polinomios de grado menor o igual que 2 ?

2.3 (4 Puntos) La circunferencia $x^2 + y^2 = 8$ está dividida por la parábola $y = \frac{x^2}{2}$ en dos partes. Hallar el area de las dos figuras.