MATEMÁTICAS II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

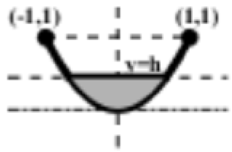
---

1. Discutir el sistema y resolver en los casos compatibles (2.5 puntos)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & a \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 2a \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 3 \end{array}\right.$$

---

2. Se tiene una abrevadero de longitud $6\,m$ y de altura $1\,m$. Su sección es la descrita en la figura formada por la función $y = x^2$. Por h indicamos la altura del nivel del líquido.



a) Comprueba que el área de la región S, sombreada en la figura, en función de h se puede expresar como $S(h) = \dfrac{4h\sqrt{h}}{3}$. (1.5 puntos)

b) Determina la altura h donde se alcanza la mitad del volumen total del abrevadero. (Nota: Volumen=S×longitud). (1 punto)

---

3. Los puntos $A(0,1,0)$ y $B(-1,1,1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercero C pertenece a la recta $r: \left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ z = 1 \end{array}\right.$. Además la recta que une A y C es perpendicular a la recta r.

a) Determina el punto C. (1.5 puntos)

b) Calcula el área del triángulo. (1 punto)

---

4. Consideremos dos dados, uno normal con las caras numeradas del 1 al 6 y otro trucado, con 4 caras con el número 5 y 2 caras con el número 6. Se elige al azar uno de los dados y se lanza.

a) Calcula la probabilidad de sacar 5. (1.25 puntos)

b) Si el resultado de la tirada es 5, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado? (1.25 puntos)

OPCIÓN B

---

1. Dada la matriz A, calcula:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Su rango. (1.5 puntos)

b) Si existe, una columna combinación lineal de las restantes. (0.5 puntos)

c) Si existe, una fila combinación lineal de las restantes. (0.5 puntos)

---

2. Se tienen $20\,m$ de marco metálico para construir una valla publicitaria rectangular. El terreno donde se quiere instalar la valla es fangoso y al colocarla se hunde una altura h que es la quinta parte de la anchura de la valla. Calcula las medidas de la valla de forma que el área visible (la sombreada en la figura) sea la máxima posible. (2.5 puntos)

---

3. Dados los puntos $A(2,1,0)$ y $B(1,0,-1)$ y r la recta que determinan. Y sea s la recta definida por $s: \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de las rectas. (1.25 puntos)

b) Determina un punto C de la recta s tal que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ sean perpendiculares. (1.25 puntos)

---

4. Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el baloncesto y al 30 % les gustan ambos deportes.

a) Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)? (1 punto)

b) Se eligen 100 alumnos al azar con reemplazamiento, es decir, cada vez que se elige un alumno se le pregunta por sus gustos y se repone a la clase, pudiendo ser elegido nuevamente. Calcule, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que como mucho a 75 les guste el fútbol. (0.75 puntos)

c) Si en el apartado anterior la muestra hubiese sido de 10 alumnos, y no de 100 ¿cuál hubiese sido la probabilidad de que exactamente a 5 les gustase el fútbol? (0.75 puntos)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x) \quad x \geq 0$. $F(1.5) = 0.9332$, $F(1.375) = 0.9154$, $F(1.25) = 0.8944$, $F(1.125) = 0.8697$, $F(1) = 0.8413$)
